纯粹数学与应用数学专著 第2号

齐次可列马尔可夫过程

侯振挺　郭青峰　著

科学出版社

纯粹数学与应用数学专著　第2号

齐次可列马尔可夫过程

侯振挺　郭青峰　著

科　学　出　版　社

1 9 7 8

内 容 简 介

本书为作者关于齐次可列马尔可夫过程构造论研究成果的总结.

作者提出"最小非负解"方法和另一个由王梓坤提出又为作者发展的极限过渡法,成功地解决了一系列齐次可列马尔可夫过程的重要理论问题.

第一、二篇是理论基础;第三、四篇研究齐次可列马尔可夫链和过程的各种性质;第五篇研究齐次可列马尔可夫过程的构造理论.

本书可供高等学校概率论专门化的师生以及数学工作者阅读.

纯粹数学与应用数学专著 第2号

齐次可列马尔可夫过程

侯振挺 郭青峰 著

*

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

北京新华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1978 年 9 月第 一 版 开本:850×1168 1/32

1978 年 9 月第一次印刷 印张:8 1/8

印数:0001—21,340 字数:212,000

统一书号:13031·779

本社书号:1118·13—1

定价: 1.05 元

序

马尔可夫过程在概率论的研究中占有重要地位．齐次可列马尔可夫过程则是马尔可夫过程的主要一支．它在科学技术各个领域（如物理学、控制论、排队论、动态规划等）中有着广泛的应用．

齐次可列马尔可夫过程中的理论问题可大致分成两类．第一，是对任意给定的过程的各种性质的研究；第二，是对任给的一个Q矩阵，定性研究Q过程及构造出全部Q过程来．本书是作者近年来对上述两个问题研究成果的一个总结，其中大部分工作还都是第一次公开发表．它由五篇构成，第一、二篇是理论基础，第三、四篇是研究第一个问题，第五篇是研究第二个问题．贯穿本书始终的有两个数学方法．其一，我们把它叫做“最小非负解方法”；其二是“极限过渡法”：用样本函数较简单的过程去逼近任意过程．大致说来，这两个方法是这样配合的：用最小非负解方法研究样本函数较简单的过程（马氏链、最小Q过程和一阶Q过程），在此基础上依据第一篇中给出的“构造定理”用极限过渡法来研究任意过程．前一方法是作者提出的，后一方法是王梓坤同志在他的“生灭过程构造论”一文中建立的，而为我们发展的．

第一、二章是全书的一个框架，较难读．但到第十一章才用到．所以可先浏览一下（以了解全书的轮廓），待用到时再详读．

我们的工作始终得到党组织的亲切关怀和支持，也得到许多同志的帮助、鼓励和指教．其中主要有苗邦均、杨向群、王梓坤、越民义、韩继业、墨文川、陈木法和李峻贤等同志，还有钟开莱教授．在此一并致谢．

由于我们思想水平低，专业知识浅薄，错误和不当之处在所难免．敬请同志们指正．

作者

1975.2

目　录

第一篇　齐次可列马尔可夫过程样本函数构造论

第一章　第一构造定理

§1.1.　引　　言

设 $X(\omega)=\{x(t,\omega),t<\sigma(\omega)\}$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的齐次可列马尔可夫过程．其最小状态空间 $E=(1,2,\cdots)$，其转移概率矩阵 $(p_{ij}(t),\ i,\ j\in E)_{t\geqslant 0}$ 是标准的，且其 Q 矩阵满足关系：

$$q_{ij}\geqslant 0\ (i\neq j),\quad \sum_{j\neq i}q_{ij}=-q_{ii}\equiv q_i<+\infty \qquad (1.1.1)$$

为了简洁，根据［1，II 的定理 5.1、定理 5.7 以及 §7］、不影响转移概率矩阵，我们总假定 $X(\omega)$ 具有如下的性质（D）：

（D_1）右连续．从而是完全可分的，Borel 可测的，并且具有强马氏性．

（D_2）$(\omega:\ \mu(t:\ x(t,\omega)=+\infty)=0)=\Omega$，这里 μ 表示 Lebesgue 测度．

（D_3）$(\omega$：对任一 $i\in E$ 和任一 $t\in[0,\sigma(\omega))$，在 $[0,t)$ 中仅含有 $x(\cdot,\omega)$ 的有限个 i-区间$)=\Omega$．

习知，以 $Q=(q_{ij})$ 为密度矩阵的过程（一切具有相同转移概率矩阵的过程视为同一过程）未必一个，我们泛称其为 Q 过程．

Q 过程的性质的研究的难易在很大程度上依赖于其样本函数的结构的繁简．下面我们首先区分出样本函数结构最简单的“最小 Q 过程”和样本函数结构较简单的一类所谓“一阶 Q 过程”．它们是研究任意 Q 过程的基础．

定义 1.1.1.　对于 $\tau\leqslant\sigma(\omega)$，称 τ 为 $x(\cdot,\omega)$ 的飞跃点，如果 $\tau=\sigma(\omega)$，或 $\tau<\sigma(\omega)$ 且对任意 $\varepsilon>0$，在 $(\tau-\varepsilon,\tau+\varepsilon)$ 中，$x(\cdot,\omega)$ 有无穷多个跳跃点．

显见，飞跃点的聚点仍是飞跃点，因此 $x(\cdot, \omega)$ 的一切飞跃点构成一个闭集．所以，$x(\cdot, \omega)$ 的第一个飞跃点存在，今以 τ_1 表示之．

定义 1.1.2. 如果 Q 过程 $X(\omega)=\{x(t, \omega), t<\sigma(\omega)\}$ 满足条件

$$\tau_1(\omega)=\sigma(\omega) \quad (\omega \in \Omega) \tag{1.1.2}$$

则称 $X(\omega)$ 为最小 Q 过程或零阶 Q 过程．

定义 1.1.3. 如果 Q 过程 $X(\omega)=\{x(t, \omega), t<\sigma(\omega)\}$ 满足如下两个条件，则称之为一阶 Q 过程：

(1) $$(\omega: x(\tau_1(\omega))=\infty)=\emptyset \tag{1.1.3}$$

(2) 对任一 $\omega \in \Omega$ 及任一 $t \in [0, \sigma(\omega))$，在 $[0, t)$ 中 $x(\cdot, \omega)$ 至多有有限个飞跃点．

由定义 1.1.2 和定义 1.1.3 知，零阶 Q 过程是一阶 Q 过程的退化情况．

王梓坤在 [2] 中严格地论证了生灭过程的样本函数的构造定理，并在 [2]，[3] 中及杨超群在 [4]，[5] 中把构造定理成功地用于生灭过程的一系列研究上．本章的目的则是给出 Q 过程的样本函数的构造定理 1.5.1．该定理的意义在于使得对过程的性质的研究可按如下程序进行：先研究样本函数结构最简单的最小 Q 过程，继而研究样本函数结构较简单的一阶 Q 过程，最后，依据构造定理用"极限过渡法"研究任意 Q 过程．

§1.2. g_n 变换的定义

设 $X(\omega)=\{x(t, \omega), t<\sigma(\omega)\}$ 是任一 Q 过程，$D_n=(1,2, \cdots, n)$．令

$$\beta_0^{(n)}(\omega) \equiv 0 \tag{1.2.1}$$

$$\sigma_1^{(n)}(\omega) \text{ 是 } x(\cdot, \omega) \text{ 的第一个飞跃点} \tag{1.2.2}$$

$$\beta_1^{(n)}(\omega)=\begin{cases}\inf\,(t: \sigma_1^{(n)}(\omega) \leqslant t<\sigma(\omega), x(t, \omega) \in D_n) \\ \sigma(\omega), \text{ 如上集合空}\end{cases} \tag{1.2.3}$$

设 $\sigma_{m-1}^{(n)}(\omega)$，$\beta_{m-1}^{(n)}(\omega)$ 已定义，如 $\beta_{m-1}^{(n)}(\omega)=\sigma(\omega)$，则令 $\sigma_m^{(n)}(\omega)=$

$\beta_m^{(n)}(\omega)=\sigma(\omega)$，否则令

$$\sigma_m^{(n)}(\omega)\text{ 为 } x(\cdot,\omega)\text{ 在 } \beta_{m-1}^{(n)}(\omega)\text{ 后的第一个飞跃点} \tag{1.2.4}$$

$$\beta_m^{(n)}(\omega)=\begin{cases}\inf(t:\ \sigma_m^{(n)}(\omega)\leqslant t<\sigma(\omega),x(t,\omega)\in D_n)\\ \sigma(\omega),\text{ 如上集合空}\end{cases} \tag{1.2.5}$$

于是，有

$$0\equiv\beta_0^{(n)}(\omega)\leqslant\sigma_1^{(n)}(\omega)\leqslant\beta_1^{(n)}(\omega)\leqslant\cdots$$
$$\leqslant\sigma_m^{(n)}(\omega)\leqslant\beta_m^{(n)}(\omega)\leqslant\cdots\leqslant\sigma(\omega) \tag{1.2.6}$$

令

$$\tau_k^{(n)}(\omega)=\begin{cases}0,\ k=0\\ \sum_{s=1}^{k}(\sigma_s^{(n)}(\omega)-\beta_{s-1}^{(n)}(\omega)),\ k>0\end{cases} \tag{1.2.7}$$

$$\sigma^{(n)}(\omega)=\sum_{s=1}^{\infty}(\sigma_s^{(n)}(\omega)-\beta_{s-1}^{(n)}(\omega))=\lim_{k\to\infty}\tau_k^{(n)}(\omega) \tag{1.2.8}$$

$$\alpha_t^{(n)}(\omega)=\begin{cases}\beta_{k-1}^{(n)}(\omega)+(t-\tau_{k-1}^{(n)}(\omega)),\\ \quad\text{如}\quad \tau_{k-1}^{(n)}(\omega)\leqslant t<\tau_k^{(n)}(\omega)\\ \sigma(\omega);\quad\text{如}\quad t\geqslant\sigma^{(n)}(\omega)\end{cases} \tag{1.2.9}$$

对任一 $\omega\in\Omega$，$t<\sigma^{(n)}(\omega)$ 令

$$x_{(t,\omega)}^{(n)}=x(\alpha_t^{(n)}(\omega),\omega) \tag{1.2.10}$$

我们把由 $X(\omega)=\{x(t,\omega),t<\sigma(\omega)\}$ 到 $X^{(n)}(\omega)=\{x^{(n)}(t,\omega),t<\sigma^{(n)}(\omega)\}$ 的变换记为

$$g_n(X(\omega))=X^{(n)}(\omega) \tag{1.2.11}$$

§1.3. 叙列 $X^{(n)}(\omega)$ ($n\geqslant1$) 的收敛性

引理 1.3.1.

$$\lim_{k\to\infty}\beta_k^{(n)}(\omega)=\beta^{(n)}(\omega)=\sigma(\omega)\quad(\omega\in\Omega) \tag{1.3.1}$$

证．由 (1.2.6) 知，极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\beta_k^{(n)}(\omega)=\beta^{(n)}(\omega)\,(\omega\in\Omega)$ 存在．

令

$$\Delta=(\omega:\ \beta^{(n)}(\omega)<\sigma(\omega)) \tag{1.3.2}$$

于是

$$\beta^{(n)}(\omega) < +\infty \quad (\omega \in \Delta) \tag{1.3.3}$$

对每一 $\omega \in \Delta$，由性质（D_1）和 $x(\beta_{k-1}^{(n)}(\omega)) \in D_n$ 知，如 $\beta_{k-1}^{(n)}(\omega) < \sigma(\omega)$，则

$$\beta_{k-1}^{(n)}(\omega) < \sigma_k^{(n)}(\omega) \leqslant \sigma(\omega)$$

于是有

$$\begin{aligned}0 \equiv \beta_0^{(n)}(\omega) < \sigma_1^{(n)}(\omega) \leqslant \beta_1^{(n)}(\omega) < \sigma_2^{(n)}(\omega) \leqslant \cdots \\ \leqslant \beta_{k-1}^{(n)}(\omega) < \sigma_k^{(n)}(\omega) \leqslant \beta_k^{(n)}(\omega) < \cdots < \sigma(\omega) \\ (\omega \in \Delta)\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

从而

$$\begin{aligned}0 \equiv \beta_0^{(n)}(\omega) < \beta_1^{(n)}(\omega) < \cdots < \beta_k^{(n)}(\omega) < \cdots \\ < \sigma(\omega) \quad (\omega \in \Delta)\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

由 $D_n = (1, 2, \cdots, n)$ 只包含有限个元素及 $x(\beta_k^{(n)}(\omega)) \in D_n$ 知，对任一 $\omega \in \Delta$，必有某 $i \in D_n$ 使

$$x(\beta_k^{(n)}(\omega)) = i，\text{对无穷个 } k \text{ 成立} \tag{1.3.6}$$

于是易知

$$x(\cdot, \omega) \text{ 在 } [0, \beta^{(n)}(\omega)) \text{ 中有无穷个 } i\text{-区间} \tag{1.3.7}$$

从而，由 (1.3.3) 和性质（D_3）知 $\Delta = \varnothing$. 引理证毕.

引理 1.3.2. 对任一 $\omega \in \Omega$ 和 $t < \sigma(\omega)$，我们有

$$\lim_{n \to \infty} \mu(B_t^{(n)}(\omega)) = 0 \tag{1.3.8}$$

其中

$$B_t^{(n)}(\omega) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [\sigma_k^{(n)}(\omega), \beta_k^{(n)}(\omega)) \cap [0, t) \tag{1.3.9}$$

证. 令

$$A(\omega) = (t: x(t, \omega) \neq +\infty, t < \sigma(\omega)) \tag{1.3.10}$$

$$B(\omega) = (t: x(t, \omega) = +\infty, t < \sigma(\omega)) \tag{1.3.11}$$

$$A^{(n)}(\omega) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [\beta_{k-1}^{(n)}(\omega), \sigma_k^{(n)}(\omega)) \tag{1.3.12}$$

$$B^{(n)}(\omega) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [\sigma_k^{(n)}(\omega), \beta_k^{(n)}(\omega)) \tag{1.3.13}$$

于是由引理 1.3.1 易知

$$A(\omega)\cup B(\omega)=A^{(n)}(\omega)\cup B^{(n)}(\omega)=[0,\sigma(\omega)) \tag{1.3.14}$$

$$A^{(n)}(\omega)\subseteq A^{(n+1)}(\omega) \tag{1.3.15}$$

$$B^{(n)}(\omega)\supseteq B^{(n+1)}(\omega) \tag{1.3.16}$$

$$A(\omega)=\bigcup_{n=1}^{\infty}A^{(n)}(\omega) \tag{1.3.17}$$

$$B(\omega)=\bigcap_{n=1}^{\infty}B^{(n)}(\omega) \tag{1.3.18}$$

因此，如果令

$$A_t(\omega)=A(\omega)\cap[0,t) \tag{1.3.19}$$

$$B_t(\omega)=B(\omega)\cap[0,t) \tag{1.3.20}$$

$$A_t^{(n)}(\omega)=A^{(n)}(\omega)\cap[0,t) \tag{1.3.21}$$

则由 (1.3.9), (1.3.13)—(1.3.18) 得

$$B_t^{(n)}(\omega)=B^{(n)}(\omega)\cap[0,t) \tag{1.3.22}$$

$$A_t(\omega)\cup B_t(\omega)=A_t^{(n)}(\omega)\cup B_t^{(n)}(\omega)=[0,t) \tag{1.3.23}$$

$$A_t^{(n)}(\omega)\subseteq A_t^{(n+1)}(\omega) \tag{1.3.24}$$

$$B_t^{(n)}(\omega)\supseteq B_t^{(n+1)}(\omega) \tag{1.3.25}$$

$$A_t(\omega)=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_t^{(n)}(\omega) \tag{1.3.26}$$

$$B_t(\omega)=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_t^{(n)}(\omega) \tag{1.3.27}$$

由

$$\mu(B_t^{(n)}(\omega))\leqslant t<+\infty \tag{1.3.28}$$

$$\mu(B_t(\omega))\leqslant\mu(B(\omega))=0 \tag{1.3.29}$$

以及 (1.3.27) 得

$$\lim_{n\to\infty}\mu(B_t^{(n)}(\omega))=\mu(B_t(\omega))=0 \tag{1.3.30}$$

于是引理得证.

引理 1.3.3. 对任一 $\omega\in\Omega$ 和 $t<\sigma(\omega)$ 我们有

$$\alpha_t^{(n)}(\omega)\downarrow t\quad(n\uparrow+\infty) \tag{1.3.31}$$

证. 由引理 1.3.2 知

$$\lim_{n\to\infty} \sigma^{(n)}(\omega) = \sigma(\omega) \tag{1.3.32}$$

于是由 $t < \sigma(\omega)$ 知,存在 $N > 0$, 使

$$t < \sigma^{(n)}(\omega) \quad (n \geqslant N) \tag{1.3.33}$$

由 $\alpha_t^{(n)}(\omega)$ 的定义知

$$\alpha_t^{(n)}(\omega) = t + \mu(B^{(n)}_{\alpha_t^{(n)}(\omega)}(\omega)) \quad (n \geqslant N) \tag{1.3.34}$$

$$\alpha_t^{(n)}(\omega) \geqslant \alpha_t^{(n+1)}(\omega) \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{1.3.35}$$

由 $B_t^{(n)}(\omega)$ 的定义和 (1.3.35) 得

$$0 \leqslant \mu(B^{(n)}_{\alpha_t^{(n)}(\omega)}(\omega)) \leqslant \mu(B^{(n)}_{\alpha_t^{(N)}(\omega)}(\omega)) \quad (n \geqslant N) \tag{1.3.36}$$

由 $\alpha_t^{(n)}(\omega)$ 的定义和 (1.3.33) 知

$$\alpha_t^{(N)}(\omega) < \sigma(\omega) \leqslant +\infty \tag{1.3.37}$$

于是由引理 1.3.2 得

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B^{(n)}_{\alpha_t^{(N)}(\omega)}(\omega)) = 0 \tag{1.3.38}$$

由 (1.3.34), (1.3.35), (1.3.36) 和 (1.3.38) 立得 (1.3.31). 引理证毕.

定理 1.3.1. 在 $[0, \sigma(\omega))$ $(\omega \in \Omega)$ 上处处有

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)}(t, \omega) = x(t, \omega). \tag{1.3.39}$$

证. 设 $t < \sigma(\omega)$, 于是存在 $N > 0$, 使

$$x^{(n)}(t, \omega) = x(\alpha_t^{(n)}(\omega), \omega) \quad (n \geqslant N) \tag{1.3.40}$$

于是由性质 (D_1) 和引理 1.3.3 立得我们的定理.

§1.4. 关于 $X^{(n)}(\omega)$ $(n \geqslant 1)$ 的进一步性质

设 $X(\omega) = \{x(t, \omega), t < \sigma(\omega)\}$ 是任一 Q 过程. 以 N_t 表示由形如 $(x_u = i, \sigma > t)$ $(u \leqslant t,\ i \in E \cup \{+\infty\})$ 的集合所产生的在空间 $\Omega_t = (\sigma > t)$ 中的 σ-代数. 于是有

$$u \leqslant t,\ A \in N_u \Rightarrow A \cap \Omega_t \in N_t \tag{1.4.1}$$

关于不依赖于将来的随机变量,我们将采用的是 [6] 中的定义,即

定义 1.4.1. 函数 $\delta(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ 叫做关于过程

$$X(\omega) = \{x(t, \omega), t < \sigma(\omega)\}$$

的不依赖于将来的随机变量，如果

(1)
$$0 \leqslant \delta(\omega) \leqslant \sigma(\omega) \quad (\omega \in \Omega) \tag{1.4.2}$$

(2) 对一切 $t \geqslant 0$ 有
$$(\delta \leqslant t < \sigma) \in N_t \tag{1.4.3}$$

显然，条件(2)可用下列的条件代替：

(2)' 对一切 $t \geqslant 0$ 有
$$(\delta > t) \in N_t \tag{1.4.4}$$

引理 1.4.1. 若 $\delta(\omega)$ 是关于过程
$$X(\omega) = \{x(t, \omega), t < \sigma(\omega)\}$$
的不依赖于将来的随机变量，则
$$(\delta > u, \sigma > t) \in N_t \quad (u \leqslant t) \tag{1.4.5}$$
$$(\delta \geqslant u, \sigma > t) \in N_t \quad (u \leqslant t) \tag{1.4.6}$$
$$(\delta = u, \sigma > t) \in N_t \quad (u \leqslant t) \tag{1.4.7}$$
$$(\delta \leqslant u, \sigma > t) \in N_t \quad (u \leqslant t) \tag{1.4.8}$$
以及
$$(\delta < u, \sigma > t) \in N_t \quad (u \leqslant t) \tag{1.4.9}$$

证. 由(1.4.1)和(1.4.4)得(1.4 5)，从而得(1.4.8). 由(1.4.1)和(1.4.5)知
$$(\delta \geqslant u, \sigma > t) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\delta > u - \frac{1}{n}, \sigma > t\right) \in N_t \tag{1.4.10}$$
于是得(1.4.6)，从而得(1.4.9). 由(1.4.5)和(1.4.6)得(1.4.7). 引理得证.

引理 1.4.2. 设 δ_1, δ_2 是关于过程
$$X(\omega) = \{x(t, \omega), t < \sigma(\omega)\}$$
的不依赖于将来的随机变量，且 $\delta_1 \leqslant \delta_2$, 则
$$(\delta_2 - \delta_1 < r, \delta_2 \leqslant t, \sigma > t) \in N_t \tag{1.4.11}$$
及
$$(\delta_2 - \delta_1 > r, \delta_2 \leqslant t, \sigma > t) \in N_t \tag{1.4.12}$$

证. (i) (1.4.11) 式的证明.

若 $r \leqslant 0$，则

$$(\delta_2 - \delta_1 < r,\ \delta_2 \leqslant t,\ \sigma > t) = \varnothing \in N_t \qquad (1.4.13)$$

若 $r > 0$，R 表示有理数集，则由引理 1.4.1 知

$$\begin{aligned}
&(\delta_2 - \delta_1 < r,\ \delta_2 \leqslant t,\ \sigma > t) \\
&= (\delta_2 < \delta_1 + r,\ \delta_2 < t,\ \sigma > t) \cup (\delta_2 < \delta_1 + r,\ \delta_2 = t,\ \sigma > t) \\
&= \left\{ \bigcup_{\substack{r_1, r_2 \in R \\ r_1, r_2 < t \\ r_2 < r_1 + r}} [(\delta_2 < r_2, \sigma > t) \cap (\delta_1 > r_1, \sigma > t)] \right\} \\
&\quad \cup [(\delta_1 > t - r,\ \sigma > t) \cap (\delta_2 = t,\ \sigma > t)] \in N_t \qquad (1.4.14)
\end{aligned}$$

由 (1.4.13) 和 (1.4.14) 立得 (1.4.11)；

(ii) (1.4.12) 式的证明.

若 $r < 0$，则

$$(\delta_2 - \delta_1 > r,\ \delta_2 \leqslant t,\ \sigma > t) = (\delta_2 \leqslant t,\ \sigma > t) \in N_t \qquad (1.4.15)$$

若 $r \geqslant 0$，则由引理 1.4.1 知

$$\begin{aligned}
&(\delta_2 - \delta_1 > r,\ \delta_2 \leqslant t,\ \sigma > t) \\
&= \left\{ \bigcup_{\substack{r_1, r_2 \in R \\ r_1, r_2 < t \\ r_2 > r_1 + r}} [(\delta_2 > r_2,\ \sigma > t) \cap (\sigma_2 < t,\ \sigma > t) \cap (\delta_1 < r_1,\ \sigma > t)] \right\} \\
&\quad \cup [(\delta_1 < t - r,\ \sigma > t) \cap (\delta_2 = t,\ \sigma > t)] \in N_t \qquad (1.4.16)
\end{aligned}$$

由 (1.4.15) 和 (1.4.16) 立得 (1.4.12).

引理证毕.

引理 1.4.3. 对于任一 $s \in [0, +\infty)$，$\alpha_s^{(n)}(\omega)$ 是关于 Q 过程 $X(\omega) = \{x(t, \omega),\ t < \sigma(\omega)\}$ 的不依赖于将来的随机变量.

证. 在本引理的证明过程中把 $\alpha_s^{(n)}(\omega)$ 简记为 $\alpha(\omega)$. 并注意 $\beta_0^{(n)}(\omega)$，$\sigma_k^{(n)}(\omega)$，$\beta_k^{(n)}(\omega)$ ($k = 1, 2, \cdots$) 都是关于 Q 过程 $X(\omega)$ 的不依赖于将来的随机变量.

下面分两种情况进行论证：

(i) $t < s$.

若 $\omega \in (\sigma > t)$ 及 $s \geqslant \sigma^{(n)}(\omega)$，则 $\alpha(\omega) = \sigma(\omega) > t$；若 $\omega \in (\sigma > t)$ 及 $s < \sigma^{(n)}(\omega)$，则 $\alpha(\omega) \geqslant s > t$. 于是 $(\alpha > t) \supseteq$

$(\sigma > t)$. 但恒有 $(\alpha > t) \subseteq (\sigma > t)$. 所以,当 $t < s$ 时我们有

$$(\alpha > t) = (\sigma > t) \tag{1.4.17}$$

(ii) $t \geqslant s$.

由于 $(\alpha > t) \subseteq (\sigma > t)$, 所以 $(\alpha > t) = (\alpha > t, \sigma > t)$. 于是由引理1.3.1得

$$(\alpha > t) = \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} (\beta_{k-1}^{(n)} \leqslant t < \sigma_k^{(n)}, \alpha > t, \sigma > t)\right]$$

$$\cup \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} (\sigma_k^{(n)} \leqslant t < \beta_k^{(n)}, \alpha > t, \sigma > t)\right] \tag{1.4.18}$$

由于当 $\beta_0^{(n)} \leqslant t < \sigma_1^{(n)}$ 时有 $\alpha \leqslant s \leqslant t$, 所以

$$(\beta_0^{(n)} \leqslant t < \sigma_1^{(n)}, \alpha > t, \sigma > t) = \varnothing \tag{1.4.19}$$

由 (1.3.22) 及 $\alpha > t$ 当且仅当 $\mu(B_t^{(n)}) > t - s$ 知

$$\begin{aligned}
&(\beta_{k-1}^{(n)} \leqslant t < \sigma_k^{(n)}, \alpha > t, \sigma > t) \\
&= (\beta_{k-1}^{(n)} \leqslant t < \sigma_k^{(n)}, \mu(B_t^{(n)}) > t - s, \sigma > t) \\
&= \left[\left(\sum_{j=1}^{k-1} (\beta_j^{(n)} - \sigma_j^{(n)})\right) > t - s, \beta_{k-1}^{(n)} \leqslant t, \sigma > t\right] \cap (\sigma_k^{(n)} > t) \\
&= \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\bigcup_{r_j \in R} \left[\bigcap_{j=1}^{k-1} (\beta_j^{(n)} - \sigma_j^{(n)} > r_j, \beta_j^{(n)} \leqslant t, \sigma > t)\right] \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} r_j > t - s \end{array}\right\} \cap (\sigma_k^{(n)} > t)
\end{aligned}$$

$$(k > 1) \tag{1.4.20}$$

由 (1.3.21) 及 $\alpha > t$ 当且仅当 $\mu(A_t^{(n)}) < s$, 知

$$\begin{aligned}
&(\sigma_k^{(n)} \leqslant t < \beta_k^{(n)}, \alpha > t, \sigma > t) \\
&= (\sigma_k^{(n)} \leqslant t < \beta_k^{(n)}, \mu(A_t^{(n)}) < s, \sigma > t) \\
&= \left[\left(\sum_{j=1}^{k} \sigma_j^{(n)} - \beta_{j-1}^{(n)}\right) < s, \sigma_k^{(n)} \leqslant t, \sigma > t\right] \cap (\beta_k^{(n)} > t) \\
&= \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\bigcup_{r_j \in R} \left[\bigcap_{j=1}^{k} (\sigma_j^{(n)} - \beta_{j-1}^{(n)} < r_j, \sigma_j^{(n)} \leqslant t, \sigma > t)\right] \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k} r_j < s \end{array}\right\}
\end{aligned}$$

$$\cap (\beta_k^{(n)} > t) \tag{1.4.21}$$

由定义 1.4.1，引理 1.4.2 以及 (1.4.17)—(1.4.21)知，$(\alpha > t) \in N_t$. 于是由 $0 \leqslant \alpha(\omega) \leqslant \sigma(\omega)(\omega \in \Omega)$ 及定义 1.4.1 立得我们的引理.

定理 1.4.1. $X^{(n)}(\omega) = \{x^{(n)}(t, \omega),\ t < \sigma^{(n)}(\omega)\}$ 是一个一阶 Q 过程.

证. 显见，只需证明 $X^{(n)}(\omega)$ 是齐次马尔可夫过程. 设

$$0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_{k-1} < t_k, \quad i_1, i_2, \cdots, i_k \in E \tag{1.4.22}$$

令

$$\Delta_t^{(n)} = (\omega;\ \alpha_t^{(n)}(\omega) < \sigma(\omega)) \tag{1.4.23}$$

显见

$$\Delta_t^{(n)} = (\omega;\ t < \sigma^{(n)}(\omega)) \tag{1.4.24}$$

$$\Delta_{t_1}^{(n)} \supseteq \Delta_{t_2}^{(n)} \supseteq \cdots \supseteq \Delta_{t_k}^{(n)} \tag{1.4.25}$$

由引理 1.4.3 知，$\alpha_{t_j}^{(n)}(j = 1, 2, \cdots, k)$ 是关于过程 $X(\omega)$ 的不依赖于将来的随机变量. 令

$$\tilde{x}(t, \omega) = x(\alpha_{t_{k-1}}^{(n)}(\omega) + t, \omega)$$
$$(\omega \in \Delta_{t_{k-1}}^{(n)},\ t < \sigma(\omega) - \alpha_{t_{k-1}}^{(n)}(\omega)) \tag{1.4.26}$$

由强马氏性，$\alpha_{t_{k-1}}^{(n)}(\omega)$ 是关于过程 $X(\omega)$ 的不依赖于将来的随机变量以及 $P(x(\alpha_{t_{k-1}}^{(n)}(\omega)) = +\infty) = 0$ 知，

$$\tilde{X}(\omega) = \{\tilde{x}(t, \omega),\ t < \sigma(\omega) - \alpha_{t_{k-1}}^{(n)}(\omega)\} \quad (\omega \in \Delta_{t_{k-1}}^{(n)})$$

是与 $X(\omega)$ 有相同转移概率的 Q 过程. 令 $\tilde{\alpha}_t^{(n)}(\omega)$ $(\omega \in \Delta_{t_{k-1}}^{(n)})$ 是对 Q 过程 $\tilde{X}(\omega)$ 按 (1.2.9) 的方式定义的随机变量. 显见有

$$\alpha_{t_k}^{(n)}(\omega) - \alpha_{t_{k-1}}^{(n)}(\omega) = \tilde{\alpha}_{t_k - t_{k-1}}^{(n)}(\omega)(\omega \in \Delta_{t_k}^{(n)}) \tag{1.4.27}$$

于是

$$\begin{aligned}
&P(x^{(n)}(t_k) = i_k \mid x^{(n)}(t_1) = i_1,\ x^{(n)}(t_2) = i_2, \cdots, x^{(n)}(t_{k-1}) \\
&= i_{k-1}) = P(x(\alpha_{t_k}^{(n)}) = i_k \mid x(\alpha_{t_1}^{(n)}) \\
&= i_1, x(\alpha_{t_2}^{(n)}) = i_2, \cdots, x^{(n)}(\alpha_{t_{k-1}}) = i_{k-1}) \\
&= P(x(\alpha_{t_k}^{(n)}) = i_k \mid x(\alpha_{t_{k-1}}^{(n)}) = i_{k-1}) \\
&= P(\tilde{x}(\alpha_{t_k}^{(n)} - \alpha_{t_{k-1}}^{(n)}) = i_k \mid \tilde{x}(0) = i_{k-1}) \\
&= P(\tilde{x}(\tilde{\alpha}_{t_{k-1}t_{k-1}}^{(n)}) = i_k \mid \tilde{x}(0) = i_{k-1}) \\
&= P(x(\alpha_{t_k - t_{k-1}}^{(n)}) = i_k \mid x(0) = i_{k-1}) \\
&= P(x^{(n)}(t_k - t_{k-1}) = i_k \mid x^{(n)}(0) = i_{k-1})
\end{aligned} \tag{1.4.28}$$

所以 $X^{(n)}(\omega)$ 是齐次马尔可夫过程．定理证毕．

注 1.4.1. 如引用[7]中的记号和结果，则定理 1.4.1 的证明还可再简单些．实际上，易知 $\alpha_t^{(n)}(\omega)$ 满足[7]中的条件 (3.i)—(3.v)（在 [7] 中假定经受随机时间变换的过程是不断的，其实这不是本质的），于是由 [7，定理 2.1] 立知 $X^{(n)}(\omega)$ 是齐次马尔可夫过程，从而定理 1.4.1 成立．

§ 1.5. 第一构造定理

总结上面诸节的结果得

定理 1.5.1（第一构造定理）． 设 $X(\omega)=\{x(t,\omega),\ t<\sigma(\omega)\}$ 是任一 Q 过程，令

$$X^{(n)}(\omega)=g_n(X(\omega)) \tag{1.5.1}$$

则 (i) $X^{(n)}(\omega)=\{x^{(n)}(t,\omega),\ t<\sigma^{(n)}(\omega)\}$ 是一个一阶 Q 过程；

(ii) 在 $[0,\sigma(\omega))$ $(\omega\in\Omega)$ 上处处有

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)}(t,\omega)=x(t,\omega) \tag{1.5.2}$$

第二章　第二构造定理

§2.1. 引　　言

设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为一完备概率空间，

$$X^{(n)}(\omega) = \{x^{(n)}(t, \omega),\ t < \sigma^{(n)}(\omega)\}$$

是其上的一列一阶Q过程，且

$$g_n(X^{(n+1)}(\omega)) = X^{(n)}(\omega) \qquad (2.1.1)$$

从而有

$$g_n(X^{(m)}(\omega)) = X^{(n)}(\omega) \quad (m \geqslant n) \qquad (2.1.2)$$

关于Q过程、一阶Q过程以及变换g_n的定义均见第一章，并且注意，同第一章一样，在本章中所涉及的一切Q过程都应满足第一章中的(1.1.1)和性质(D).

下面§2—§4是对任一固定的$\omega \in \Omega$，研究$x^{(n)}(t,\omega)$ $(n \geqslant 1)$在$n \to +\infty$时之收敛问题．故在§2—§4中所见到的有关各记号中我们均把ω省去，不致引起误解.

本章的目的是要证明构造定理2.5.1．该定理主要用于"对于任给的一个Q矩阵，构造出全部Q过程来".

§2.2. 映　射　T_{mn}

对任一固定的自然数n，我们按如下方式定义$\tau_k^{(n)}(k = 0, 1, \cdots)$：

$$\tau_0^{(n)} = 0 \qquad (2.2.1)$$

$$\tau_1^{(n)}\text{ 为 } x^{(n)}(t) \text{ 的第一个飞跃点} \qquad (2.2.2)$$

设$\tau_{k-1}^{(n)}$已定义，如$\tau_{k-1}^{(n)}(\omega) = \sigma^{(n)}$，则令$\tau_k^{(n)} = \sigma^{(n)}$，否则令

$$\tau_k^{(n)}\text{ 为 } x^{(n)}(t) \text{ 的在 } \tau_{k-1}^{(n)} \text{ 后第一个飞跃点} \qquad (2.2.3)$$

由$x^{(n)}(t)$是一阶Q过程知，上述$\tau_k^{(n)}(k = 0, 1, \cdots)$唯一决定，且

$$\lim_{k\to\infty}\tau_k^{(n)}=\sigma^{(n)} \tag{2.2.4}$$

对 $m\geqslant n$，令

$$\beta_0^{(m,n)}=0 \tag{2.2.5}$$

$$\sigma_1^{(m,n)}\text{ 为 } x^{(m)}(t)\text{ 的第一个飞跃点} \tag{2.2.6}$$

$$\beta_1^{(m,n)}=\begin{cases}\inf(t:\ \sigma_1^{(m,n)}\leqslant t<\sigma^{(m)},\ x^{(m)}(t)\in D_n)\\ \sigma^{(m)},\ \text{如果上集合空}\end{cases} \tag{2.2.7}$$

这里 $D_n=(1,2,\cdots,n)$. 设 $\sigma_{k-1}^{(m,n)}$, $\beta_{k-1}^{(m,n)}$ 已定义，如 $\beta_{k-1}^{(m,n)}=\sigma^{(m)}$，则令 $\sigma_k^{(m,n)}=\beta_k^{(m,n)}=\sigma^{(m)}$，否则令

$$\sigma_k^{(m,n)}\text{ 为 } x^{(m)}(t)\text{ 的在 } \beta_{k-1}^{(m,n)}\text{ 后的第一个飞跃点} \tag{2.2.8}$$

$$\beta_k^{(m,n)}=\begin{cases}\inf(t:\ \sigma_k^{(m,n)}\leqslant t<\sigma^{(m)},\ x^{(m)}(t)\in D_n)\\ \sigma^{(m)},\ \text{如上集合空}\end{cases} \tag{2.2.9}$$

显然有

$$\sigma^{(1)}\leqslant\sigma^{(2)}\leqslant\cdots\leqslant\sigma^{(m)}\leqslant\cdots \tag{2.2.10}$$

$$0=\beta_0^{(m,n)}\leqslant\sigma_1^{(m,n)}\leqslant\cdots\leqslant\sigma_k^{(m,n)}\leqslant\beta_k^{(m,n)}\leqslant\cdots\leqslant\sigma^{(m)} \tag{2.2.11}$$

$$\sigma_k^{(n,n)}\leqslant\sigma_k^{(n+1,n)}\leqslant\cdots\leqslant\sigma_k^{(n+s,n)}\leqslant\cdots\quad(k=1,2,\cdots) \tag{2.2.12}$$

$$\beta_k^{(n,n)}\leqslant\beta_k^{(n+1,n)}\leqslant\cdots\leqslant\beta_k^{(n+s,n)}\leqslant\cdots\quad(k=0,1,\cdots) \tag{2.2.13}$$

$$\sigma_k^{(n,n)}=\beta_k^{(n,n)}=\tau_k^{(n)}\quad(k=1,2,\cdots) \tag{2.2.14}$$

$$\sigma_k^{(m,n)}-\beta_{k-1}^{(m,n)}=\sigma_k^{(n,n)}-\beta_{k-1}^{(n,n)}=\tau_k^{(n)}-\tau_{k-1}^{(n)}\quad(m\geqslant n) \tag{2.2.15}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^{(m,n)}-\beta_{k-1}^{(m,n)}=\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k^{(n)}-\tau_{k-1}^{(n)}=\sigma^{(n)}\quad(m\geqslant n) \tag{2.2.16}$$

由 (2.2.10)，(2.2.12)，以及 (2.2.13) 知，极限

$$\lim_{m\to\infty}\sigma^{(m)}=\sigma \tag{2.2.17}$$

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_k^{(m,n)}=\sigma_k^{(n)} \tag{2.2.18}$$

以及

$$\lim_{m\to\infty}\beta_k^{(m,n)}=\beta_k^{(n)} \tag{2.2.19}$$

存在(有限或无穷). 由 (2.11) 知

$$0=\beta_0^{(n)}\leqslant\sigma_1^{(n)}\leqslant\cdots\leqslant\sigma_k^{(n)}\leqslant\beta_k^{(n)}\leqslant\cdots\leqslant\sigma \tag{2.2.20}$$

由 (2.2.15) 知，若 $\beta_{k-1}^{(n)}<+\infty$，则

$$\sigma_k^{(n)}-\beta_{k-1}^{(n)}=\sigma_k^{(m,n)}-\beta_{k-1}^{(m,n)}=\tau_k^{(n)}-\tau_{k-1}^{(n)}\quad(m\geqslant n) \tag{2.2.21}$$

令

$$R^{(m,n)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} [\beta_{k-1}^{(m,n)}, \sigma_k^{(m,n)}) \tag{2.2.22}$$

作由 $[0, \sigma^{(n)})$ 到 $R^{(m,n)}$ 上的映射 T_{mn}：若 $t \in [\tau_{k-1}^{(n)}, \tau_k^{(n)})$，则令

$$T_{mn}t = \beta_{k-1}^{(m,n)} + t - \tau_{k-1}^{(n)} \tag{2.2.23}$$

显见，若 $t_1 < t_2$，且 $t_1, t_2 \in [0, \sigma^{(n)})$，则

$$T_{mn}t_1 < T_{mn}t_2 \tag{2.2.24}$$

故 T_{mn} 的逆映射 T_{mn}^{-1} 存在唯一. 由 (2.1.2) 知

$$x^{(n)}(t) = x^{(m)}(T_{mn}t) \quad t \in [0, \sigma^{(n)}) \tag{2.2.25}$$

$$x^{(m)}(t) = x^{(n)}(T_{mn}^{-1}t) \quad t \in R^{(m,n)} \tag{2.2.26}$$

显然，若 $k \geqslant m \geqslant n$，则

$$T_{km}T_{mn}t = T_{kn}t \quad t \in [0, \sigma^{(n)}) \tag{2.2.27}$$

$$T_{mn}^{-1}T_{km}^{-1}t = T_{kn}^{-1}t \quad t \in R^{(k,n)} \tag{2.2.28}$$

特别

$$T_{mn}\tau_k^{(n)} = \beta_k^{(m,n)}$$

$$x^{(n)}(\tau_k^{(n)}) = x^{(m)}(\beta_k^{(m,n)}) \tag{2.2.29}$$

§2.3. 映 射 W_n

设 $t \in [0, \sigma^{(n)})$，由于

$$t = T_{nn}t \leqslant T_{n+1,n}t \leqslant \cdots \leqslant T_{n+k,n}t \leqslant \cdots \tag{2.3.1}$$

故极限

$$\lim_{k \to \infty} T_{n+k,n}t = \bar{t} \tag{2.3.2}$$

存在(有限或无穷). 令

$$\hat{\sigma}^{(n)} = \sup(t: t \in [0, \sigma^{(n)}), \lim_{k \to \infty} T_{n+k,n}t < +\infty) \tag{2.3.3}$$

易证，当且仅当 $t \in [0, \hat{\sigma}^{(n)})$ 时有

$$\lim_{k \to \infty} T_{n+k,n}t < +\infty \tag{2.3.4}$$

及

$$\lim_{n \to \infty} \hat{\sigma}^{(n)} = \sigma \tag{2.3.5}$$

令

$$A^{(n)} = (\hat{t}\text{: 存在 } t \in [0, \hat{\sigma}^{(n)}),\text{ 使 } \lim_{k\to\infty} T_{n+k,n}t = \hat{t}) \tag{2.3.6}$$

显见,存在 $1 \leqslant s_n \leqslant +\infty$ 使

$$[0, \hat{\sigma}^{(n)}) = \bigcup_{k=1}^{s_n} [\tau_{k-1}^{(n)}, \tau_k^{(n)}) \tag{2.3.7}$$

及

$$A^{(n)} = \bigcup_{k=1}^{s_n} [\beta_{k-1}^{(n)}, \sigma_k^{(n)}) \tag{2.3.8}$$

以及当 $s_n < +\infty$ 时有

$$\beta_0^{(n)} < \beta_1^{(n)} < \cdots < \beta_{s_n-1}^{(n)} < \beta_{s_n}^{(n)} = \sigma \tag{2.3.9}$$

令

$$J_n = \begin{cases} (1, 2\cdots, s_n), & \text{若} \quad s_n < +\infty \\ (1, 2, \cdots), & \text{若} \quad s_n = +\infty \end{cases} \tag{2.3.10}$$

作由 $[0, \hat{\sigma}^{(n)})$ 到 $A^{(n)}$ 上的映射 W_n:

$$W_n t = \lim_{k\to\infty} T_{n+k,n} t \quad t \in [0, \hat{\sigma}^{(n)}) \tag{2.3.11}$$

显见,若 $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in [0, \hat{\sigma}^{(n)})$, 则

$$T_{n+k,n}t_2 - T_{n+k,n}t_1 \geqslant t_2 - t_1 \tag{2.3.12}$$

从而

$$W_n t_2 - W_n t_1 \geqslant t_2 - t_1 \tag{2.3.13}$$

于是, W_n 的逆映射 W_n^{-1} 存在唯一,且若

$$t = \tau_{k-1}^{(n)} + \alpha_1, \quad 0 \leqslant \alpha_1 < \tau_k^{(n)} - \tau_{k-1}^{(n)}, \quad k \in J_n \tag{2.3.14}$$

则

$$W_n t = \beta_{k-1}^{(n)} + \alpha_1 \tag{2.3.15}$$

反之,若

$$\hat{t} = \beta_{k-1}^{(n)} + \alpha_2, \quad 0 \leqslant \alpha_2 < \sigma_k^{(n)} - \beta_{k-1}^{(n)}, \quad k \in J_n \tag{2.3.16}$$

则

$$W_n^{-1}\hat{t} = \tau_{k-1}^{(n)} + \alpha_2 \tag{2.3.17}$$

特别

$$W_n \tau_k^{(n)} = \beta_k^{(n)} \quad k \in J_n \tag{2.3.18}$$

令

$$B^{(n)} = [0, \sigma) \setminus A^{(n)} \tag{2.3.19}$$

$$A_t^{(n)} = A^{(n)} \cap [0, t) \tag{2.3.20}$$

$$B_t^{(n)} = B^{(n)} \cap [0, t) \tag{2.3.21}$$

于是有

$$A_\sigma^{(n)} = A^{(n)}, \quad B_\sigma^{(n)} = B^{(n)} \tag{2.3.22}$$

$$t + \mu(B_{W_n t}^{(n)}) = W_n t, \quad t \in [0, \hat{\sigma}^{(n)}) \tag{2.3.23}$$

$$t - \mu(B_t^{(n)}) = W_n^{-1} t, \quad t \in A^{(n)} \tag{2.3.24}$$

其中 μ 表示 Lebesgue 测度.

容易证明下列两条引理:

引理 2.3.1. 若

$$t_1 \in [0, \hat{\sigma}^{(n)}), \quad t_2 \in A^{(n)} \tag{2.3.25}$$

则

$$W_n t_1 = W_m T_{mn} t_1 \quad (m \geq n) \tag{2.3.26}$$

$$W_n^{-1} t = T_{mn}^{-1} W_m^{-1} t_2 \quad (m \geq n) \tag{2.3.27}$$

引理 2.3.2. 对任一 $s \in [0, \sigma)$ 有

$$A_s^{(n)} \subseteq A_s^{(n+1)} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2.3.28}$$

从而有

$$B_s^{(n)} \supseteq B_s^{(n+1)} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2.3.29}$$

令

$$A_t = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_t^{(n)} \quad 0 \leq t \leq \sigma . \tag{2.3.30}$$

$$B_t = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_t^{(n)} \quad 0 \leq t \leq \sigma \tag{2.3.31}$$

$$A = A_\sigma \tag{2.3.32}$$

$$B = B_\sigma \tag{2.3.33}$$

于是有

$$A_t \cap B_t = \varnothing, \quad A_t \cup B_t = [0, t) \tag{2.3.34}$$

$$A \cap B = \varnothing, \quad A \cup B = [0, \sigma) \tag{2.3.35}$$

引理 2.3.3.

$$\mu(B)=0 \tag{2.3.36}$$

首先作些准备工作.

命题 2.3.1. 设 $0\leqslant t\leqslant\sigma$, $t<+\infty$, 则

$$\lim_{m\to\infty}\mu(B_t^{(m)})=\mu(B_t) \tag{2.3.37}$$

命题 2.3.2. 设 $0\leqslant s\leqslant\sigma$ 及

$$0\leqslant s_k\uparrow s \quad (k\uparrow+\infty) \tag{2.3.38}$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\mu(B_{s_k}^{(m)})=\mu(B_s^{(m)}) \tag{2.3.39}$$

$$\lim_{k\to\infty}\mu(B_{s_k})=\mu(B_s) \tag{2.3.40}$$

命题 2.3.3. 若

$$\beta_k^{(n)}<+\infty \tag{2.3.41}$$

则

$$\mu(B_{\beta_k^{(n)}})=0 \tag{2.3.42}$$

证. 由 (2.3.23) 和 (2.3.41) 知

$$\beta_k^{(m,n)}+\mu(B^{(m)}_{W_m\beta_k^{(m,n)}})=W_m\beta_k^{(m,n)} \quad (m\geqslant n) \tag{2.3.43}$$

但

$$\beta_k^{(m,n)}=T_{mn}\tau_k^{(n)} \quad (m\geqslant n) \tag{2.3.44}$$

故由引理 2.3.1 和 (2.3.18) 知

$$W_m\beta_k^{(m,n)}=W_n\tau_k^{(n)}=\beta_k^{(n)} \tag{2.3.45}$$

把 (2.3.45) 代入 (2.3.43) 得

$$\beta_k^{(m,n)}+\mu(B^{(m)}_{\beta_k^{(n)}})=\beta_k^{(n)} \tag{2.3.46}$$

由 (2.2.19),(2.3.41) 以及命题 (2.3.1) 得

$$\beta_k^{(n)}+\mu(B_{\beta_k^{(n)}})=\beta_k^{(n)} \tag{2.3.47}$$

于是立得 (2.3.42). 命题获证.

引理 2.3.3. 的证明.

显然至多可能出现下列三种情况:

(i) 存在 $n>0$, 使

$$\lim_{k\to\infty}\beta_k^{(n)}=\sigma \tag{2.3.48}$$

且存在 $s>0$，使

$$0=\beta_0^{(n)}<\sigma_1^{(n)}<\beta_1^{(n)}<\cdots<\beta_{s-1}^{(n)}<\sigma_s^{(n)}$$
$$=\beta_s^{(n)}=\sigma_{s+1}^{(n)}=\cdots=\sigma \tag{2.3.49}$$

(ii) 存在 $n>0$，使

$$\lim_{k\to\infty}\beta_k^{(n)}=\sigma \tag{2.3.50}$$

但

$$\beta_k^{(n)}<\sigma \quad (k=1,2,\cdots) \tag{2.3.51}$$

(iii) 对一切 $n>0$ 有

$$\lim_{k\to\infty}\beta_k^{(n)}<\sigma \tag{2.3.52}$$

下面在情况 (i),(ii) 以及 (iii) 之下分别证明引理的真实性:

(1) 设情况 (i) 发生.

这时显见有

$$\mu(B)=\mu(B_{\beta_{s-1}^{(n)}}) \tag{2.3.53}$$

但这时

$$\beta_{s-1}^{(n)}<\sigma\leqslant+\infty \tag{2.3.54}$$

于是由命题 2.3.3 立得 (2.3.36);

(2) 设情况 (ii) 发生.

由命题 2.3.2 和 2.3.3 立得 (2.3.36);

(3) 情况 (iii) 不可能发生.

实因,对任一 $n>0$ 有

$$\beta_k^{(n)}\geqslant\beta_k^{(m,n)}\geqslant\sigma_k^{(m,n)}\geqslant\tau_k^{(m)} \quad (m\geqslant n) \tag{2.3.55}$$

故

$$\lim_{k\to\infty}\beta_k^{(n)}\geqslant\lim_{k\to\infty}\tau_k^{(m)}=\sigma^{(m)} \quad (m\geqslant n) \tag{2.3.56}$$

从而

$$\lim_{k\to\infty}\beta_k^{(n)}\geqslant\lim_{m\to\infty}\sigma^{(m)}=\sigma \tag{2.3.57}$$

但这与 (2.3.52) 矛盾,所以情况 (iii) 不可能发生.

至此,引理获证.

引理 2.3.4. 对于 $t\in[0,\hat{\sigma}^{(n)})$ 有

$$W_n t\downarrow t \quad (n\uparrow+\infty) \tag{2.3.58}$$

证. 由 $t\in[0,\hat{\sigma}^{(n)})$ 知

$$W_n t<+\infty \tag{2.3.59}$$

显见

$$t\leqslant W_n t\downarrow \quad (n\uparrow+\infty) \tag{2.3.60}$$

于是

$$t\leqslant\lim_{n\to\infty}W_n t<+\infty \tag{2.3.61}$$

任意固定一个自然数 n_0, 并令

$$W_{n_0}t=\hat{t}\in[0,\hat{\sigma}) \tag{2.3.62}$$

于是

$$\mu(B_{W_n t}^{(n)})\leqslant\mu(B_{\hat{t}}^{(n)})<\hat{t}<+\infty \tag{2.3.63}$$

由引理 2.3.3. 得

$$\lim_{n\to\infty}\mu(B_{W_n t}^{(n)})\leqslant\lim_{n\to\infty}\mu(B_{\hat{t}}^{(n)})=\mu(B_{\hat{t}})\leqslant\mu(B)=0 \tag{2.3.64}$$

由 (2.3.23) 和 (2.3.64) 立得 (2.3.58). 于是引理得证.

§ 2.4. 作辅助函数

令

$$x(t)=\begin{cases}x^{(n)}(W_n^{-1}t), & \text{如}\quad t\in A^{(n)}\\ +\infty, & \text{如}\quad t\in B\end{cases} \tag{2.4.1}$$

由 (2.2.26) 和引理 2.3.1. 知

$$x^{(n+1)}(W_{n+1}^{-1}t)=x^{(n)}(T_{n+1,n}^{-1}W_{n+1}^{-1}t)=x^{(n)}(W_n^{-1}t)\quad t\in A^{(n)} \tag{2.4.2}$$

于是 $x(t)$ 在 $[0,\sigma)$ 上唯一决定.

引理 2.4.1. $x(t)$ 在 $[0,\sigma)$ 上右连续,且

$$\mu(t:\ t\in[0,\sigma),\ x(t)=+\infty)=0 \tag{2.4.3}$$

证. 由引理 2.3.3 立得 (2.4.3). 由 $x^{(n)}(t)$ 之右连续性易证 $x(t)$在集 A 的每一点上是右连续的. 往证 $x(t)$ 在集 B 的每一点上也右连续.

设 $t\in B$, 注意引理 2.3.3., 易证, 存在一串区间 $[\sigma_{k_n}^{(n)},\ \beta_{k_n}^{(n)})$ $(n=1,2,\cdots)$,使

$$t\in[\sigma_{k_n}^{(n)},\ \beta_{k_n}^{(n)})\in B^{(n)}\quad(n=1,2,\cdots) \tag{2.4.4}$$

$$[\sigma_{k_n}^{(n)},\ \beta_{k_n}^{(n)})\supset[\sigma_{k_{n+1}}^{(n+1)},\ \beta_{k_{n+1}}^{(n+1)})\quad(n=1,2,\cdots) \tag{2.4.5}$$

以及
$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{k_n}^{(n)} = \lim_{n\to\infty}\beta_{k_n}^{(n)} = t \tag{2.4.6}$$
显然,在区间 $[\sigma_{k_n}^{(n)},\ \beta_{k_n}^{(n)})$ 中 $x(t)$ 之值大于 n, 所以
$$\lim_{s\to t} x(s) = +\infty = x(t) \tag{2.4.7}$$
因此, $x(t)$ 在 B 的每一点上右连续. 引理获证.

引理 2.4.2. 对于任一 $t\in[0,\sigma)$ 及任一 $i\in E$, 在 $[0,t)$ 中仅有 $x(\cdot)$ 的有限个 i-区间.

证. 由在 $[0,t)$ 中 $x(\cdot)$ 的 i-区间的个数不多于 $x^{(i)}(\cdot)$ 的 i-区间的个数和在 $[0,t)$ 中 $x^{(i)}(\cdot)$ 仅有有限个 i-区间立得我们的引理.

引理 2.4.3.
$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)}(t) = x(t) \quad t\in[0,\sigma) \tag{2.4.8}$$
证. 设 n 充分大,由 (2.3.5) 知,可使 $t\in[0,\sigma^{(n)})$. 于是有
$$x^{(n)}(t) = x(W_n t) \tag{2.4.9}$$
由 (2.4.9)、引理 2.3.4 和引理 (2.4.1) 立得 (2.4.8). 证毕.

§ 2.5. 第二构造定理

定理 2.5.1 (第二构造定理). 设
$$X^{(n)}(\omega) = \{x^{(n)}(t,\omega),\ t<\sigma^{(n)}(\omega)\} \quad (n\geqslant 1)$$
是一列一阶 Q 过程,且满足
$$g_n(X^{(n+1)}(\omega)) = X^{(n)}(\omega) \tag{2.5.1}$$
则对于任一 $t\in[0,\sigma)$, 极限
$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)}(t,\omega) = x(t,\omega) \quad (\omega\in\Omega) \tag{2.5.2}$$
存在,且 $X(\omega)=\{x(t,\omega),\ t<\sigma(\omega)\}$ 是一个 Q 过程. 其中
$$\sigma(\omega) = \lim_{n\to\infty}\sigma^{(n)}(\omega) \quad (\omega\in\Omega) \tag{2.5.3}$$
证. 由 § 2.4 知,只需证明下列二点:

(i) $X(\omega)$ 是一个齐次马尔可夫过程;

(ii) 对于任一 $t\in[0,+\infty)$ 有
$$P(\omega:\ x(t,\omega)=+\infty) = 0 \tag{2.5.4}$$

关于此可仿［2，定理 6.2 和定理 6.3］的证明推出．于是定理获证．

§2.6. 定理 2.5.1 的深化

定义 2.6.1. 满足(2.5.1)的 Q 过程叙列 $X^{(n)}(\omega)$ $(n\geqslant 1)$ 叫做 Q 过程基本叙列.

定义 2.6.2. 设 $X^{(n)}(\omega)=\{x^{(n)}(t,\omega),\ t<\sigma^{(n)}(\omega)\}$ $(n\geqslant 1)$ 是 Q 过程基本叙列．若

$$\hat{\sigma}^{(n)}(\omega)=\sigma^{(n)}(\omega)\quad(\omega\in\Omega)\tag{2.6.1}$$

则称 $X^{(n)}(\omega)$ $(n\geqslant 1)$ 为 Q 过程强基本叙列．其中 $\hat{\sigma}^{(n)}(\omega)$ 为(2.3.3)式所定义．

设 $X^{(n)}(\omega)=\{x^{(n)}(t,\omega),t<\sigma^{(n)}(\omega)\}$ 是 Q 过程基本叙列，令

$$\hat{x}^{(n)}(t,\omega)=x^{(n)}(t,\omega),\ 0\leqslant t<\hat{\sigma}^{(n)}(\omega),\ \omega\in\Omega\tag{2.6.2}$$

$$\hat{X}^{(n)}(\omega)=\{\hat{x}^{(n)}(t,\omega),\ t<\hat{\sigma}^{(n)}(\omega)\}\tag{2.6.3}$$

引理 2.6.1. 假设和记号如同定理 2.5.1.，则

$$g_n(X(\omega))=\hat{X}^{(n)}(\omega)\tag{2.6.4}$$

且 $\hat{X}^{(n)}(\omega)$ $(n\geqslant 1)$ 是 Q 过程强基本叙列.

证．(2.6.4)显然成立．于是由定理 1.5.1 知 $\hat{X}^{(n)}(\omega)(n\geqslant 1)$ 是 Q 过程基本叙列．又由(2.6.4)知它还是强基本叙列．引理获证．

定义 2.6.3. 设 $X^{(n)}(\omega)$ $(n\geqslant 1)$ 是 Q 过程基本叙列，则由(2.6.3)定义的 Q 过程强基本叙列叫做 $X^{(n)}(\omega)$ $(n\geqslant 1)$ 的极小收缩.

由定理 2.5.1. 和引理 2.6.1. 立得

定理 2.6.1. 设 $X^{(n)}(\omega)=\{x^{(n)}(t,\omega),\ t<\sigma^{(n)}(\omega)\}$ $(n\geqslant 1)$ 是 Q 过程基本叙列，$\hat{X}^{(n)}(\omega)=\{\hat{x}^{(n)}(t,\omega),t<\hat{\sigma}^{(n)}(\omega)\}$ $(n\geqslant 1)$ 是它的极小收缩，则

(i) $\hat{X}^{(n)}(\omega)$ $(n\geqslant 1)$ 是 Q 过程强基本叙列，对于任一 $t\in[0,\sigma(\omega))$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{(n)}(t,\omega)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{x}^{(n)}(t,\omega)$ $(\omega\in\Omega)$ 存在而且相等．对于任一 $t\in[0,\sigma(\omega))$ 若令

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)}(t,\omega) = \lim_{n\to\infty} \hat{x}^{(n)}(t,\omega) = x(t,\omega) \quad (\omega \in \Omega) \tag{2.6.5}$$

则 $X(\omega) = \{x(t,\omega),\ t < \sigma(\omega)\}$ 是一个 Q 过程,其中

$$\sigma(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sigma^{(n)}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \hat{\sigma}^{(n)}(\omega) \tag{2.6.6}$$

(ii)

$$g_n(X(\omega)) = \hat{X}^{(n)}(\omega) \tag{2.6.7}$$

§ 2.7. 小　结

利用 § 6 中的结果和引入的术语,可把定理 1.5.1 加以深化并给出它的逆定理.

定理 2.7.1. 设 $X(\omega) = \{x(t,\omega),\ t < \sigma(\omega)\}$ 是一个 Q 过程,若令

$$g_n(X(\omega)) = X^{(n)}(\omega) \tag{2.7.1}$$

则

(i) $X^{(n)}(\omega) = \{x^{(n)}(t,\omega),\ t < \sigma^{(n)}(\omega)\}$ $(n \geqslant 1)$ 是 Q 过程强基本叙列;

(ii) 对于任一 $t \in [0, \sigma(\omega))$ 有

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)}(t,\omega) = x(t,\omega) \quad (\omega \in \Omega) \tag{2.7.2}$$

定理 2.7.2. 设 $X^{(n)}(\omega) = \{x^{(n)}(t,\omega),\ t < \sigma^{(n)}(\omega)\}$ $(n \geqslant 1)$ 是 Q 过程强基本叙列,则

(i) 对于任一 $t \in [0, \sigma(\omega))$, 极限

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)}(t,\omega) = x(t,\omega) \quad (\omega \in \Omega) \tag{2.7.3}$$

存在,且 $X(\omega) = \{x(t,\omega),\ t < \sigma(\omega)\}$ 是一个 Q 过程,其中

$$\sigma(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sigma^{(n)}(\omega) \quad (\omega \in \Omega) \tag{2.7.4}$$

(ii)

$$g_n(X(\omega)) = X^{(n)}(\omega) \tag{2.7.5}$$

第二篇　非负线性方程组的最小非负解理论

第三章　一 般 理 论

§3.1.　引　　言

本章的目的是给出非负线性方程组的最小非负解的一般理论.

本章的§2, §3和§6的结果或思想基本上来源于[8]的第一章的§2, 因此, 本章的结论的证明大都略去.

§3.2.　非负线性方程组的定义及其最小非负解的定义、存在和唯一性

定义 3.2.1.　线性方程组

$$x_i = \sum_{k \in E} c_{ik} x_k + b_i \quad (i \in E) \tag{3.2.1}$$

称为非负线性方程组, 如果

$$0 \leqslant c_{ik} < +\infty \ (i, k \in E), \ 0 \leqslant b_i \leqslant +\infty \ (i \in E)^{1)}$$

E 为有限集 $(1, 2, \cdots n)$ 或可列集 $(1, 2, \cdots)$.

下面总假定 (3.2.1) 是非负线性方程组.

定义 3.2.2.　(3.2.1) 的非负解 $0 \leqslant x_i^* \leqslant +\infty \ (i \in E)$ 称为其最小非负解, 如果对于(3.2.1)的任一非负解 $0 \leqslant x_i \leqslant +\infty (i \in E)$ 恒有

$$x_i^* \leqslant x_i \quad (i \in E) \tag{3.2.2}$$

请读者注意, 今后我们常把 $a_n \uparrow a \ (n \uparrow +\infty)$ 记为

$$\text{V-}\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

定理 3.2.1.　(3.2.1) 的最小非负解存在唯一; 若令

1) 本篇总认为非负数集包括 $+\infty$.

$$\left.\begin{aligned} x_i^{(0)} &\equiv 0 \quad (i \in E) \\ x_i^{(n+1)} &= \sum_{k \in E} c_{ik} x_k^{(n)} + b_i \quad (n \geqslant 0, i \in E) \end{aligned}\right\} \tag{3.2.3}$$

则极限

$$\text{V-}\lim_{n \to \infty} x_i^{(n)} = x_i^* \quad (i \in E) \tag{3.2.4}$$

存在，且 $x_i^*(i \in E)$ 就是(3.2.1)的最小非负解.

本篇总以 $x_i^*(i \in E)$ 表示(3.2.1)的最小非负解[1]. (3.2.2)称为 $x_i^*(i \in E)$ 的最小性.

系 3.2.1. 若(3.2.1)是齐次的，即 $b_i \equiv 0$, $(i \in E)$，则

$$x_i^* \equiv 0 \quad (i \in E) \tag{3.2.5}$$

定理 3.2.2. 设

$$b_i^{(n)} \geqslant 0 \quad (n \geqslant 1, i \in E) \tag{3.2.6}$$

$$\text{V-}\lim_{n \to \infty} b_i^{(n)} = b_i \quad (i \in E) \tag{3.2.7}$$

若令

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}_i^{(1)} &= b_i^{(1)} \quad (i \in E) \\ \tilde{x}_i^{(n+1)} &= \sum_{k \in E} c_{ik} \tilde{x}_k^{(n)} + b_i^{(n+1)} \quad (n \geqslant 1, i \in E) \end{aligned}\right\} \tag{3.2.8}$$

则

$$\text{V-}\lim_{n \to \infty} \tilde{x}_i^{(n)} = x_i^* \quad (i \in E) \tag{3.2.9}$$

系 3.2.2. 设

$$a_i^{(n)} \geqslant 0 \quad (n \geqslant 1, i \in E) \tag{3.2.10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_i^{(n)} = b_i \quad (i \in E) \tag{3.2.11}$$

若令

$$\left.\begin{aligned} \tilde{y}_i^{(1)} &= a_i^{(1)} \quad (i \in E) \\ \tilde{y}_i^{(n+1)} &= \sum_{k \in E} c_{ik} \tilde{y}_k^{(n)} + a_i^{(n+1)} \quad (n \geqslant 1, i \in E) \end{aligned}\right\} \tag{3.2.12}$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{y}_i^{(n)} = x_i^* \quad (i \in E) \tag{3.2.13}$$

---

1) 往后把这种求解方法叫做逐次逼近法.

系 3.2.3. 若令

$$\left.\begin{aligned} y_i^{(1)} &= b_i \quad (i \in E) \\ y_i^{(n+1)} &= \sum_{k \in E} c_{ik} y_k^{(n)} \quad (n \geqslant 1,\ i \in E) \end{aligned}\right\} \tag{3.2.14}$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_i^{(n)} = x_i^* \quad (i \in E) \tag{3.2.15}$$

定理 3.2.3. (3.2.1) 的满足不等式 $0 \leqslant \bar{x}_i \leqslant p x_i^*$ ($i \in E$, $p \geqslant 1$ 为常数) 的唯一非负解是 x_i^* ($i \in E$); 从任何满足条件 $0 \leqslant \bar{x}_i^{(0)} \leqslant p x_i^*$ ($i \in E$) 的初始值 $\bar{x}_i^{(0)}$ ($i \in E$) 出发, 用逐次逼近法必然得到这个解.

定理 3.2.4. 若 $x_i^* < +\infty$ ($i \in E$), 则 (3.2.1) 的满足不等式 $|\bar{x}_i| \leqslant p x_i^*$ ($i \in E$, $p \geqslant 1$ 是常数)的唯一解是 x_i^* ($i \in E$); 从任何满足条件 $|\bar{x}_i^{(0)}| \leqslant p x_i^*$ ($i \in E$) 的初始值 $\bar{x}_i^{(0)}$ ($i \in E$) 出发,用逐次逼近法必然得到这个解.

系 3.2.4. 若 x_i^* ($i \in E$) 有性质

$$0 < \inf_{i \in E} x_i^* \leqslant \sup_{i \in E} x_i^* < +\infty \quad (i \in E) \tag{3.2.16}$$

则对应于 (3.2.1) 的齐次方程

$$x_i = \sum_{k \in E} c_{ik} x_k \tag{3.2.17}$$

无非零的有界解.

证. 事实上,若齐次方程有非零的有界解

$$\bar{x}_i \ (i \in E), \quad |\bar{x}_i| < K < +\infty \quad (i \in E)$$

令 $\inf x_i^* = A$, 于是

$$\frac{|\bar{x}_i|}{x_i^*} < \frac{|\bar{x}_i|}{A} \leqslant \frac{K}{A} \quad (i \in E) \tag{3.2.18}$$

即

$$|\bar{x}_i| \leqslant \frac{K}{A} x_i^* \quad (i \in E) \tag{3.2.19}$$

但易见 $x_i^* + \bar{x}_i$ 是 (3.2.1) 的解,而

$$|x_i^* + \bar{x}_i| \leqslant x_i^* + |\bar{x}_i| \leqslant \left(1 + \frac{K}{A}\right) x_i^* = p x_i^* \quad (i \in E) \tag{3.2.20}$$

故由定理 3.2.4 知

$$x_i^* + \bar{x}_i = x_i^* \quad (i \in E) \tag{3.2.21}$$

从而

$$\bar{x}_i \equiv 0 \quad (i \in E) \tag{3.2.22}$$

得出矛盾. 所以,(3.2.17) 无非零的有界解.

§ 3.3. 比较定理和线性组合定理

定义 3.3.1. 方程组

$$X_i \geqslant \sum_{k \in E} C_{ik} X_k + B_i \quad (i \in E) \tag{3.3.1}$$

称为 (3.2.1) 的一个优方程,如果下列不等式成立:

$$c_{ik} \leqslant C_{ik} \quad (i,\ k \in E) \tag{3.3.2}$$

$$b_i \leqslant B_i \quad (i \in E) \tag{3.3.3}$$

定理 3.3.1. 设 X_i $(i \in E)$ 是 (3.2.1) 的优方程 (3.3.1) 的任一非负解,则

$$x_i^* \leqslant X_i \quad (i \in E) \tag{3.3.4}$$

系 3.3.1. $x_i^* (i \in E)$ 具有性质

$$x_i^* < s_i \leqslant +\infty \quad (i \in G) \tag{3.3.5}$$

的充要条件是 (3.2.1) 的某个优方程具有如下的性质的非负解 X_i $(i \in E)$:

$$X_i < s_i \quad (i \in G) \tag{3.3.6}$$

其中 $G \subset E$, s_i $(i \in G)$ 是正数.

系 3.3.2. 设 $a_k \geqslant 0$ $(k \in \{0\} \cup E)$ 及 $s > 0$, 则

$$a_0 + \sum_{k \in E} a_k x_k^* < s \tag{3.3.7}$$

的充要条件是 (3.2.1) 的某个优方程组具有如下性质的非负解 X_k $(k \in E)$:

$$a_0 + \sum_{k \in E} a_k X_k < s \tag{3.3.8}$$

定理 3.3.2. 设 G 是一个有限集或可列集, $s \in G$. 若 $x_i^{(s)*}$

($i\in E$) 是非负线性方程组

$$x_i=\sum_{k\in E}c_{ik}x_k+b_i^{(s)}\quad(i\in E)\tag{3.3.9}$$

的最小非负解，则

$$\sum_{s\in G}a_s x_i^{(s)*}\quad(i\in E)$$

是非负线性方程组

$$x_i=\sum_{k\in E}c_{ik}x_k+\left(\sum_{s\in G}a_s b_i^{(s)}\right)\quad(i\in E)\tag{3.3.10}$$

的最小非负解，其中 $a_s\geqslant 0$ ($s\in G$).

定理 3.3.3. 设 $a_i>0$ ($i\in E$)，则 $a_i x_i^*$ ($i\in E$) 是非负线性方程组

$$x_i=\sum_{k\in E}c_{ik}\frac{a_i}{a_k}x_k+a_i b_i\quad(i\in E)\tag{3.3.11}$$

的最小非负解.

系 3.3.3. 设 $a\geqslant 0$，则 ax_i^* ($i\in E$) 是非负线性方程组

$$x_i=\sum_{k\in E}c_{ik}x_k+ab_i\quad(i\in E)\tag{3.3.12}$$

的最小非负解.

§ 3.4. 局部化定理

定理 3.4.1. 设 G 为 E 的非空子集. 非负线性方程组

$$x_i=\sum_{k\in G}c_{ik}x_k+\left(\sum_{k\in E\setminus G}c_{ik}x_k^*+b_i\right)\quad(i\in G)\tag{3.4.1}$$

的最小非负解 $\tilde{x}_i^*=x_i^*$ ($i\in G$).

系 3.4.1. 若

$$c_{ik}=0,\quad i\in G,\quad k\in E\setminus G\tag{3.4.2}$$

则非负线性方程组

$$x_i=\sum_{k\in G}c_{ik}x_k+b_i\quad(i\in G)\tag{3.4.3}$$

的最小非负解 $\tilde{x}_i^* = x_i^*\ (i \in G)$，非负线性方程组

$$x_i = \sum_{k \in E \setminus G} c_{ik} x_k + \left(\sum_{k \in G} c_{ik} x_k^* + b_i \right) \quad (i \in E \setminus G) \qquad (3.4.4)$$

的最小非负解 $\tilde{x}_i^* = x_i^*\ (i \in E \setminus G)$.

§ 3.5. 最小非负解的牵连性质

定义 3.5.1. 设 $A = (a_{ij},\ i,\ j \in E)$ 为一非负矩阵，如果存在 E 的有限子集 $\{i, j_1, j_2, \cdots, j_s, j\}$ 使

$$a_{ij_1} a_{j_1 j_2} \cdots a_{j_s j} > 0 \qquad (3.5.1)$$

则称在 A 中 j 可自 i 到达，并记作 $i \underset{A}{\rightsquigarrow} j$，否则说在 A 中 j 不可自 i 到达，并记作 $i \underset{A}{\not\rightsquigarrow} j$；如果 $i \underset{A}{\rightsquigarrow} j$ 及 $j \underset{A}{\rightsquigarrow} i$ 同时成立，则称在 A 中 i 与 j 互通，并记作 $i \underset{A}{\leftrightsquigarrow} j$. 若 I, J 为 E 的子集，且存在 $i \in I$, $j \in J$ 使 $i \underset{A}{\rightsquigarrow} j$，则称在 A 中 J 可自 I 到达，并记作 $I \underset{A}{\rightsquigarrow} J$，否则称在 A 中 J 不可自 I 到达，并记作 $I \underset{A}{\not\rightsquigarrow} J$. 若 $\{i\} \underset{A}{\rightsquigarrow} J$，凡 $i \in I$，则称在 A 中 J 可自 I 强到达，并记作 $I \underset{A}{\boldsymbol{\rightsquigarrow}} J$.

注 3.5.1. 显见，若 $i \underset{A}{\rightsquigarrow} j$ 及 $j \underset{A}{\rightsquigarrow} l$，则 $i \underset{A}{\rightsquigarrow} l$.

注 3.5.2. 若 $i \neq j$，则由 (3.5.1) 知，$i \underset{A}{\rightsquigarrow} j$ 与否同 a_{kk} $(k \in E)$ 无关.

注 3.5.3. 今后把 $\{i\} \underset{A}{\rightsquigarrow} J$ 记作 $i \underset{A}{\rightsquigarrow} J$ 等；设 G 为 E 的子集，令 $A_G = (a_{ik},\ i, k \in E \setminus G)$，今后常把 $i \underset{A_G}{\rightsquigarrow} j$ 记作 $i \overset{G}{\underset{A}{\rightsquigarrow}} j$ 等.

定理 3.5.1. 以 $C = (c_{ik},\ i, k \in E)$ 表示方程组 (3.2.1) 的右边系数矩阵，设 $i \underset{C}{\rightsquigarrow} j$.

(i) 若 $x_i^* = 0$，则 $x_j^* = 0$；

(ii) 若 $x_i^* < +\infty$，则 $x_j^* < +\infty$.

证. 假设

$$x_i^* = 0 \qquad (3.5.2)$$

由$i \underset{C}{\rightsquigarrow} j$知，存在$E$的有限子集$\{i, j_1, j_2, \cdots, j_s, j\}$使

$$c_{ij_1}c_{j_1j_2}\cdots c_{j_sj} > 0 \tag{3.5.3}$$

由(3.5.2)和(3.5.3)及

$$x_i^* = \sum_{k \neq j_1} c_{ik}x_k^* + c_{ij_1}x_{j_1}^* + b_i \tag{3.5.4}$$

立得$x_{j_1}^* = 0$. 同理. 由$x_{j_1}^* = 0$可得$x_{j_2}^* = 0, \cdots$,最后,由$x_{j_s}^* = 0$得$x_j^* = 0$. 于是(i)获证;同理可证(ii)的真实性. 至此,定理证毕.

系 3.5.1. 若$i \underset{C}{\rightsquigarrow} j$, 则$x_i^*$与$x_j^*$同时为零或同时大于零，同时有限或同时无穷.

注 3.5.4. 显见把定理3.5.1中的最小非负解x_i^* $(i \in E)$易为任一非负解,定理的结论仍成立.

定义 3.5.2. E的元素称为矩阵$A = (a_{ij}, i, j \in E)$的足码，E称为它的足码集.

定义 3.5.3. 称$i \in E$为矩阵$A = (a_{ij}, i, j \in E)$的本质足码，对于任一$k \in E$，当$i \underset{A}{\rightsquigarrow} k$时,就有$k \underset{A}{\rightsquigarrow} i$，否则称$i$是$A$的非本质足码.

§3.6. 极限过渡定理

定理 3.6.1. 设$E = (1, 2, \cdots)$及

$$c_{ik}^{(N)} \geqslant 0\ (i, k, N \in E),\ \text{V-}\lim_{N \to +\infty} c_{ik}^{(N)} = c_{ik}\ (i, k \in E) \tag{3.6.1}$$

$$b_i^{(N)} \geqslant 0\ (i, N \in E),\ \text{V-}\lim_{N \to +\infty} b_i^{(N)} = b_i\ (i \in E) \tag{3.6.2}$$

$$\left.\begin{aligned} y_i^{(N,1)} &= b_i^{(N)} \quad (i, N \in E) \\ y_i^{N,N+1} &= \sum_{k \in E} c_{ik}^{(N)} y_k^{(N,n)}\ (n \geqslant 1, i, N \in E) \end{aligned}\right\} \tag{3.6.3}$$

$$\left.\begin{aligned} y_i^{(1)} &= b_i \quad (i \in E) \\ y_i^{(n+1)} &= \sum_{k \in E} c_{ik} y_k^{(n)} \quad (n \geqslant 1, i \in E) \end{aligned}\right\} \tag{3.6.4}$$

以及 $\tilde{x}_i^{N*}$ $(i\in E)$ 是非负线性方程组

$$x_i=\sum_{k\in E}c_{ik}^{(n)}x_k+b_i^{(n)}\quad(i\in E)\tag{3.6.5}$$

的最小非负解，则

$$\text{V-}\lim_{N\to\infty}y_i^{(N,n)}=y_i^{(n)}\quad(n\geqslant 1,\ i\in E)\tag{3.6.6}$$

$$\text{V-}\lim_{N\to\infty}\tilde{x}_i^{(n)*}=x_i^*\quad(i\in E)\tag{3.6.7}$$

系 3.6.1. E, $c_{ik}^{(n)}$, $b_i^{(n)}$ 的定义如定理 3.6.1. 若以 $\bar{x}_i^{(n)*}(i=1, 2, \cdots, N)$ 表示非负线性方程组

$$x_i=\sum_{k=1}^{N}c_{ik}^{(n)}x_k+b_i^{(n)}\quad(i=1,2,\cdots,N)\tag{3.6.8}$$

的最小非负解，则

$$\text{V-}\lim_{N\to\infty}\bar{x}_i^{(n)*}=x_i^*\quad(i\in E)\tag{3.6.9}$$

系 3.6.2. 设 $E=(1,2,\cdots)$. 若 $x_i^{(n)*}(i=1, 2, \cdots, N)$ 是非负线性方程组

$$x_i=\sum_{k=1}^{N}c_{ik}x_k+b_i\quad(i\in E)\tag{3.6.10}$$

的最小非负解，则

$$\text{V-}\lim_{N\to\infty}x_i^{(n)*}=x_i^*\quad(i\in E)\tag{3.6.11}$$

注 3.6.1. 系 3.6.1 和系 3.6.2 把可列维非负线性方程组的最小非负解的计算问题归结为有限维非负线性方程组的最小非负解的计算问题. 关于后一问题将构成第四、五章的主要内容.

§3.7. 矩阵表示法

定理 3.7.1. 令 $C=(c_{ij}, i,j\in E)$, 而 $B=(b_i, i\in E)$ 和 $X^*=(x_i^*, i\in E)$ 为列矢量，则

$$X^*=\left(\sum_{n=0}^{\infty}C^n\right)B\tag{3.7.1}$$

即

$$x_i^* = \sum_{k\in E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{ik}^{(n)}\right)b_k = b_i + \sum_{k\in E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_{ik}^{(n)}\right)b_k\ (i\in E) \quad (3.7.2)$$

其中 $c_{ij}^{(n)}$ $(i, j\in E)$ 由 $C^n = (c_{ij}^{(n)}, i, j\in E)$ 唯一决定.

§3.8. 对 偶 定 理

设 C, D, B 为定义在 $E\times E$ 上的非负矩阵,且 C, D 的元素均有限. O 表示定义在 $E\times E$ 上的零矩阵. 令

$$\left.\begin{aligned} X^{(0)} &= O \\ X^{(n+1)} &= CX^{(n)} + B \quad (n\geqslant 0) \end{aligned}\right\} \quad (3.8.1)$$

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{X}^{(0)} &= O \\ \widetilde{X}^{(n+1)} &= \widetilde{X}^{(n)}D + B \quad (n\geqslant 0) \end{aligned}\right\} \quad (3.8.2)$$

显见,极限 $X^* = \text{V-}\lim\limits_{n\to\infty} X^{(n)}$ 及 $\widetilde{X}^* = \text{V-}\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{X}^{(n)}$ 存在.

注 3.8.1. 本节中的 B, $X^{(n)}$, $\widetilde{X}^{(n)}$, X^*, $\widetilde{X}^*$ 均表示矩阵,这与 §3.7 中的记号不同.

定理 3.8.1. 若

$$CB = BD \quad (3.8.3)$$

则

$$X^* = \widetilde{X}^* \quad (3.8.4)$$

证. 易证

$$X^* = \sum_{n=0}^{\infty} C^n B \quad (3.8.5)$$

$$\widetilde{X}^* = \sum_{n=0}^{\infty} BD^n \quad (3.8.6)$$

若 (3.8.3) 成立,则易知

$$C^n B = BD^n \quad (n = 0, 1, \cdots) \quad (3.8.7)$$

于是,由 (3.8.5),(3.8.6) 及 (3.8.7) 立得(3.8.4). 定理证毕.

第四章 计 算 方 法

§4.1. 几 个 引 理

引理 4.1.1. 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶原矩阵，r 是其最大特征数．若

$$r \geqslant 1 \tag{4.1.1}$$

则

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)} = +\infty \quad (i, j=1, 2, \cdots, n) \tag{4.1.2}$$

其中 $a_{ij}^{(k)}$ 由 $A^k=(a_{ij}^{(k)})$ 唯一决定．

证．由 [9，第十三章的 (84) 式] 知

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k}{r^k} = \left.\frac{C(\lambda)}{\psi'(\lambda)}\right|_{\lambda=r} = \frac{C(r)}{\psi'(r)} \tag{4.1.3}$$

其中 $C(\lambda)$ 是矩阵 A 的导出附加矩阵，$\psi'(\lambda)$ 是 A 的最小多项式 $\psi(\lambda)$ 的导数，由 [9，第十三章的 (53) 式] 知

$$C(r) > 0 \tag{4.1.4}$$

由 $\psi(\lambda)$ 的首项系数为 1，r 是其单重零点且是其最大实零点立得

$$\psi'(r) > 0 \tag{4.1.5}$$

故

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k}{r^k} > 0 \tag{4.1.6}$$

由 (4.1.1) 和 (4.1.6) 立得 (4.1.2)．于是引理获证．

引理 4.1.2. 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶不可约非负矩阵，r 是其最大特征数．若

$$r \geqslant 1 \tag{4.1.7}$$

则

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)} = +\infty \quad (i, j=1, 2, \cdots, n) \tag{4.1.8}$$

证. 设 h 是 A 的非原性指标，由 [9, 第十三章, §5 的推论 2]，不失一般性，可设 A^h 呈次之形式:

$$A^h = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & A_h \end{pmatrix} \tag{4.1.9}$$

其中 $A_i(i = 1, 2, \cdots, h)$ 是原矩阵，且以 r 为最大特征数. 于是，由 A 的不可约性及引理 4.1.1 易证 (4.1.8) 成立. 故引理得证.

引理 4.1.3. 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶非负矩阵，r 是其最大特征数. 若

$$r < 1 \tag{4.1.10}$$

则级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k \tag{4.1.11}$$

收敛. 反之亦然.

证. 由 r 是 A 的所有特征数中模为最大的一个及 [10, 定理 3.7] 立得此引理.

引理 4.1.4. 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶非负矩阵，r 是其最大特征数. 若

$$r < 1 \tag{4.1.12}$$

或等价地

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k \tag{4.1.13}$$

收敛，则 $(A - I)^{-1}$ 存在，且

$$(A - I)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \tag{4.1.14}$$

其中 I 为 n 阶单位矩阵.

证. 由 [10, 定理 3.7] 立得此引理.

引理 4.1.5. 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶非负矩阵，r 是其最大特征数. 则

$$r < 1 \tag{4.1.15}$$

的充要条件是

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22}-1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}-1 \end{vmatrix} > 0$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n) \qquad (4.1.16)$$

证. 由[9, 第十三章定理4]立得本引理.

§4.2. 问题的归结

设

$$x_i = \sum_{k\in E} c_{ik}x_k + b_i \quad (i \in E) \qquad (4.2.1)$$

是非负线性方程组. 令

$$t_{ik} = \begin{cases} c_{ik}, & i, k \in E \\ b_i & i \in E, k = 0 \\ 0, & i = 0, k \in E \\ 1, & i = k = 0 \end{cases} \qquad (4.2.2)$$

构造矩阵

$$T = (t_{ik}, \ i, k \in \{0\} \cup E) \qquad (4.2.3)$$

令

$$E_1 = (i: \ i \in E, i \not\underset{T}{\rightsquigarrow} 0) \qquad (4.2.4)$$

$$E_2 = E \backslash E_1 = (i: \ i \in E, i \underset{T}{\rightsquigarrow} 0) \qquad (4.2.5)$$

定义 4.2.1. 若 $E_1 = \varnothing$, 则称(4.2.1)为严格非齐次非负线性方程组,或简称为严格非齐次方程.

注 4.2.1. 若 $E_2 = \varnothing$, 则(4.2.1)显然为齐次非负线性方程组,这种方程简称为齐次方程.

定理 4.2.1. 非负线性方程组(4.2.1)的最小非负解 $x_i^*(i \in E)$ 如下唯一决定:

(i) $\{x_i^*, \ i \in E_1\}$ 是齐次方程

$$x_i = \sum_{k\in E_1} c_{ik}x_k \quad (i \in E_1) \qquad (4.2.6)$$

的最小非负解,从而

$$x_i^* = 0 \quad (i \in E_1) \tag{4.2.7}$$

(ii) $\{x_i^*, i \in E_2\}$ 是严格非齐次方程

$$x_i = \sum_{k \in E_2} c_{ik} x_k + b_i \quad (i \in E_2) \tag{4.2.8}$$

的最小非负解,且

$$x_i^* > 0 \quad (i \in E_2) \tag{4.2.9}$$

证. 参考定理 3.5.1 的证明易完成本定理的证明.

系 4.2.1. 非负线性方程组(4.2.1)的最小非负解

$$x_i^* \equiv 0 \quad (i \in E) \tag{4.2.10}$$

的充要条件是它是齐次的. 而

$$x_i^* > 0 \quad (i \in E) \tag{4.2.11}$$

的充要条件是它是严格非齐次的.

令

$$r_{ik} = \begin{cases} c_{ik}, & i, k \in E \\ 1, & b_i = +\infty, i \in E, k = 0 \text{ 或 } i = k = 0 \\ 0, & b_i < +\infty, i \in E, k = 0 \text{或 } i = 0, k \in E \end{cases} \tag{4.2.12}$$

构造矩阵

$$R = (r_{ik}, \ i, k \in \{0\} \cup E) \tag{4.2.13}$$

令

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= (i: \ i \in E, \ i \not\underset{R}{\rightsquigarrow} 0) \\ G_2 &= E \backslash G_1 = (i: \ i \in E, \ i \underset{R}{\rightsquigarrow} 0) \end{aligned}\right\} \tag{4.2.14}$$

定义 4.2.2. 若

$$G_2 = \varnothing \tag{4.2.15}$$

则称(4.2.1)为常义非负线性方程组,或简称常义方程. 若

$$G_1 = \varnothing \tag{4.2.16}$$

则称(4.2.1)为常数项本质无穷非负线性方程组,或简称为常数项本质无穷方程.

定理 4.2.2. 非负线性方程组(4.2.1)的最小非负解 $x_i^*(i\in E)$ 如下唯一决定:

(i) $\{x_i^*,\ i\in G_1\}$ 是常义方程

$$x_i=\sum_{k\in G_1}c_{ik}x_k+b_i\quad(i\in E)\qquad(4.2.17)$$

的最小非负解;

(ii) $\{x_i^*,\ i\in G_2\}$ 是常数项本质无穷方程

$$x_i=\sum_{k\in G_2}c_{ik}x_k+\Big(\sum_{k\in G_1}c_{ik}x_k^*+b_i\Big)\quad(i\in G_2)\quad(4.2.18)$$

的最小非负解,且

$$x_i^*=+\infty\quad(i\in G_2)\qquad(4.2.19)$$

证. 参考定理 3.5.1 的证明易完成本定理的证明.

系 4.2.2. 若(4.2.1)是常数项本质无穷方程,则

$$x_i^*=+\infty\quad(i\in E)\qquad(4.2.20)$$

§ 4.3. *n* 维常义严格非齐次方程

系 3.6.1. 和系 3.6.2 将可列维非负线性方程组的最小非负解的计算问题化成有限维非负线性方程组最小非负解的计算问题,而定理 4.2.1 和定理 4.2.2 把 n 维非负线性方程组的最小非负解的计算问题归结为 n 维常义严格非齐次方程的最小非负解的计算问题. 下面我们就来给出后一种方程的最小非负解的计算方法. 因下面的定理易由引理 4.1.1 —引理 4.1.5 推证,故将其证明从略.

设

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}x_k+b_i\quad(i=1,2,\cdots,n)\qquad(4.3.1)$$

是 n 维常义严格非齐次方程. 根据[9,第十三章§4]知,$C=(c_{ik})$ 经行与列的同样置换后,可化为次之形式:

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_g & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_{g+1,1} & C_{g+1,2} & \cdots & C_{g+1,g} & C_{g+1} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{l1} & C_{l2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & C_{l,l-1} & C_l \end{pmatrix} \tag{4.3.2}$$

其中 $C_i\,(i=1,2,\cdots,l)$ 是不可约非负矩阵，对每个固定的 j $(j=g+1,g+2,\cdots,l)$ 诸 $c_{jk}(1\leqslant k<j)$ 至少有一个不为零矩阵. 以 E_i, $r_i(i=1,2,\cdots,l)$ 分别表示 C_i 的足码集及最大特征数. 令

$$R_1=(i:\ i\in(1,2,\cdots,l),\ r_i<1) \tag{4.3.3}$$

$$R_2=(i:\ i\in(1,2,\cdots,l),\ r_i\geqslant 1) \tag{4.3.4}$$

$$R_1^{(1)}=(i:\ i\in R_1,\ E_i \underset{C}{\not\rightsquigarrow} \bigcup_{j\in R_2} E_j) \tag{4.3.5}$$

$$R_1^{(2)}=(i:\ i\in R_1,\ E_i \underset{C}{\rightsquigarrow} \bigcup_{j\in R_2} E_j) \tag{4.3.6}$$

定理 4.3.1. n 维常义严格非齐次方程(4.3.1)的最小非负解 $x_i^*(i=1,2,\cdots,n)$ 如下唯一决定:

(i) $\{x_i^*,\ i\in \bigcup_{j\in R_1^{(1)}} E_j\}$ 是有限维非负线性方程组

$$x_i=\sum_{k\in \bigcup_{j\in R_1^{(1)}} E_j} c_{ik}x_k+b_i\quad (i\in \bigcup_{j\in R_1^{(1)}} E_j) \tag{4.3.7}$$

的唯一有限解;

(ii)

$$x_i^*=+\infty\quad (i\in \bigcup_{j\in R_1^{(2)}\cup R_2} E_j) \tag{4.3.8}$$

第五章　囿壹方程

§5.1. 引　　言

上章在一般情况下给出了非负线性方程组的最小非负解的计算方法，但是在我们的今后研究中遇到的绝大多数是一类形式十分特殊的非负线性方程组(我们把它称为囿壹方程)．这类方程的最小非负解有着特有的性质，并且其计算可大大简化．本章就来研究这类方程的最小非负解．

定义 5.1.1. 若非负线性方程组

$$x_i = \sum_{k \in E} c_{ik} x_k + b_i \quad (i \in E) \tag{5.1.1}$$

满足条件

$$\sum_{k \in E} c_{ik} \leqslant 1 \quad (i \in E) \tag{5.1.2}$$

则称它为第一型囿壹方程；若满足条件

$$\sum_{i \in E} c_{ik} \leqslant 1 \quad (k \in E) \tag{5.1.3}$$

则称它为第二型囿壹方程；第一、二型囿壹方程统称为囿壹方程．

定义 5.1.2. 常义有限维第一型(第二型)囿壹方程叫做第一型(第二型)正则方程．第一、二型正则方程统称正则方程．

正像在§4.3中指出的那样，我们只需给出正则方程的最小非负解的计算方法．

§5.2. 第一型通外方程

定义 5.2.1. 若 n 阶非负矩阵 $A = (a_{ik})$ 满足条件

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{5.2.1}$$

则称为 n 阶第一型半随机矩阵，或简称为 n 阶半随机矩阵；若(5.2.1)对 $i=1,2,\cdots,n$ 均成立等号，则称它为 n 阶第一型随机矩阵，或简称为 n 阶随机矩阵，

设 $A=(a_{ik})$ 是 n 阶半随机矩阵，令

$$s_{ik}=\begin{cases} a_{ik}, & i,k=1,2,\cdots,n \\ 1-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}, & i=1,2,\cdots,n,\ k=0 \\ 0, & i=0,\ k=1,2,\cdots,n \\ 1, & i=k=0 \end{cases} \tag{5.2.2}$$

构造矩阵

$$S=(s_{ij},\ i,\ j\in(0,1,\cdots,n)) \tag{5.2.3}$$

定义 5.2.2. 若 n 阶半随机矩阵 $A=(a_{ik})$ 满足条件

$$i \underset{S}{\rightsquigarrow} 0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5.2.4}$$

则称 A 为 n 阶第一型通外矩阵．若 A 还不可约，则称 A 为 n 阶第一型不可约通外矩阵．

注 5.2.1. 显见，n 阶不可约半随机矩阵是 n 阶第一型通外矩阵的充要条件是它不是 n 阶随机矩阵．

注 5.2.2. 显见，n 阶半随机矩阵 $A=(a_{ik})$ 是 n 阶第一型通外矩阵的充要条件是 A 经行与列的同样置换可以化成次之形式：

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_g & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_{g+1,1} & A_{g+1,2} & \cdots & A_{g+1,g} & A_{g+1} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{l,1} & A_{l,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & A_{l,l-1} & A_l \end{pmatrix} \tag{5.2.4}$$

其中 $A_j(j=1,2,\cdots,l)$ 是第一型不可约通外矩阵，对每个固定的 $j(j=g+1,g+2,\cdots,l)$ 诸 $A_{jk}(1\leqslant k<j)$ 至少有一个不

为零矩阵.

引理 5.2.1. 若 $A=(a_{ik})$ 是 n 阶第一型通外矩阵，则

$$r<1 \tag{5.2.5}$$

这里 r 是 A 的最大特征数.

证. 由注 5.2.2 知，只需对 A 为 n 阶第一型不可约通外矩阵证明引理成立，然这可由注 5.2.1 及 [9，第十三章的 § 2 的注 2] 立即得到. 于是引理获证.

定义 5.2.2. 若第一型正则方程

$$x_i=\sum_{k=1}^{n} c_{ik}x_k+b_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5.2.6}$$

的右边系数矩阵 $C=(c_{ik})$ 是第一型通外矩阵则称它为第一型通外方程.

定理 5.2.1. 若(5.2.6)是第一型通外方程，则它有唯一(有限)解，且其最小非负解就等于其唯一(有限)解.

证. 由注 5.2.2，引理 5.2.1 以及定理 4.3.1 立得我们的定理.

§ 5.3. 第一型相容方程

定义 5.3.1. 若 $P=(p_{ij})$ 为 n 阶随机矩阵，则称

$$x_i=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}x_k \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5.3.1}$$

为第一型随机齐次方程.

易证

定理 5.3.1. 第一型随机齐次方程有无穷多组(有限)解，而其最小非负解重合于零解.

设

$$x_i=\sum_{k=1}^{n} c_{ik}x_k+b_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5.3.2}$$

是第一型正则方程. 令

$$
s_{ik}=\begin{cases} c_{ik}, & i,\ k=1,2,\cdots,n \\ 1-\sum_{j=1}^{n} c_{ij}, & i=1,2,\cdots,n,\ k=0 \\ 0, & i=0,\ k=1,2,\cdots,n \\ 1, & i=k=0 \end{cases} \tag{5.3.3}
$$

构造矩阵

$$S=(s_{ik},\ i,k\in(0,1,\cdots,n)) \tag{5.3.4}$$

令

$$E_1=(i:\ i\in(1,2,\cdots,n),\ i\underset{S}{\rightsquigarrow}0) \tag{5.3.5}$$

$$E_2=E\backslash E_1 \tag{5.3.6}$$

$$E_{11}=(c_{ik},\ i,k\in E_1)\text{ 的本质足码集} \tag{5.3.7}$$

$$E_{12}=E_1\backslash E_{11} \tag{5.3.8}$$

定义 5.3.2. 若第一型正则方程(5.3.2)满足条件

$$b_i=0\quad(i\in E_{11}) \tag{5.3.9}$$

则称它为第一型相容方程.

下面假定(5.3.2)是第一型相容方程. 易证

定理 5.3.2. 第一型相容方程(5.3.2)的最小非负解 $x_i^*(i=1,2,\cdots,n)$ 有限,即

$$x_i^*<+\infty\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{5.3.10}$$

且

(i) $\{x_i^*,\ i\in E_{11}\}$ 是第一型随机齐次方程

$$x_i=\sum_{k\in E_{11}} c_{ik}x_k\quad(i\in E_{11}) \tag{5.3.11}$$

的最小非负解,从而

$$x_i^*=0\quad(i\in E_{11}) \tag{5.3.12}$$

(ii) $\{x_i^*,\ i\in E_{12}\}$ 是第一型通外方程

$$x_i=\sum_{k\in E_{12}} c_{ik}x_k+b_i\quad(i\in E_{12}) \tag{5.3.13}$$

的最小非负解,即其唯一(有限)解;

(iii) $\{x_i^*,\ i\in E_2\}$ 是第一型通外方程

$$x_i = \sum_{k\in E_2} c_{ik}x_k + \left(\sum_{k\in E_{12}} c_{ik}x_k^* + b_i\right)\quad (i\in E_2)\quad (5.3.14)$$

的最小非负解,即其唯一(有限)解.

§5.4. 随机添尾严格非齐次方程

设

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}x_k + b_i\quad (i = 1, 2,\cdots,n)\qquad (5.4.1)$$

是第一型正则方程.

E_1, E_2, E_{11} 以及 E_{12} 的定义见上节.

定义 5.4.1. 若

$$E_2\cup E_{12} = \varnothing\qquad (5.4.2)$$

则称(5.4.1)的右边系数矩阵 $C=(c_{ik})$ 为 n 阶第一型组合随机矩阵,或简称为 n 阶组合随机矩阵. 若

$$E_1 \neq \varnothing\qquad (5.4.3)$$

且

$$E_2 \underset{C}{\rightsquigarrow} E_1\qquad (5.4.4)$$

则称 $C=(c_{ik})$ 为 n 阶随机添尾矩阵.

定义 5.4.2. 若第一型正则方程(5.4.1)是严格非齐次的且其右边系数矩阵 $C=(c_{ik})$ 是组合随机(随机添尾)矩阵, 则称它为第一型组合随机(随机添尾)严格非齐次方程. 余仿此.

定理 5.4.1. 若(5.4.1)是随机添尾严格非齐次方程,则其最小非负解

$$x_i^* = +\infty\quad (i = 1, 2,\cdots,n)\qquad (5.4.5)$$

详言之

(i) $\{x_i^*,\ i\in E_{11}\}$ 是第一型组合随机严格非齐次方程

$$x_i = \sum_{k\in E_{11}} c_{ik}x_k + b_i\quad (i\in E_{11})\qquad (5.4.6)$$

的最小非负解，从而

$$x_i^* = +\infty \quad (i \in E_{11}) \tag{5.4.7}$$

(ii) $\{x_i^*, i \in E_{12} \cup E_2\}$ 是常数项本质无穷方程

$$x_i = \sum_{k \in E_{12} \cup E_2} c_{ik} x_k + \left(\sum_{k \in E_{11}} c_{ik} x_k^* + b_i \right) \quad (i \in E_{12} \cup E_2) \tag{5.4.8}$$

的最小非负解，从而

$$x_i^* = +\infty \quad (i \in E_{12} \cup E_2) \tag{5.4.9}$$

证．易证，从略．

§5.5. 正 则 方 程

设

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_k + b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{5.5.1}$$

是第一型正则方程．

E_1, E_2, E_{11} 及 E_{12} 如同上节．令

$$t_{ik} = \begin{cases} c_{ik}, & i, k \in E_{11} \\ b_i, & i \in E_{11}, \ k = 0 \\ 0, & i = 0, \ k \in E_{11} \\ 1, & i = k = 0 \end{cases} \tag{5.5.2}$$

构造矩阵

$$T_{11} = (t_{ik}, i, k \in \{0\} \cup E_{11}) \tag{5.5.3}$$

令

$$E_{11}^{(1)} = (i: \ i \in E_{11}, \ i \underset{T_{11}}{\not\rightsquigarrow} 0) \tag{5.5.4}$$

$$E_{11}^{(2)} = (i: \ i \in E_{11}, \ i \underset{T_{11}}{\rightsquigarrow} 0) \tag{5.5.5}$$

$$E_{12}^{(1)} = (i: \ i \in E_{12}, \ i \underset{C}{\not\rightsquigarrow} E_{11}^{(2)}) \tag{5.5.6}$$

$$E_{12}^{(2)} = (i: \ i \in E_{12}, \ i \underset{C}{\rightsquigarrow} E_{11}^{(2)}) \tag{5.5.7}$$

$$E_2^{(1)} = (i: \ i \in E_2, \ i \underset{C}{\not\rightsquigarrow} E_{11}^{(2)}) \tag{5.5.8}$$

$$E_2^{(2)} = (i: \ i \in E_2, \ i \underset{C}{\rightsquigarrow} E_{11}^{(2)}) \tag{5.5.9}$$

由上面各节的结果立得

定理 5.5.1. 第一型正则方程 (5.5.1) 的最小非负解 $x_i^*(i=1,2,\cdots,n)$ 如下唯一决定:

(i) $\{x_i^*,\ i\in E_{11}^{(1)}\cup E_{12}^{(1)}\cup E_2^{(1)}\}$ 是第一型相容方程

$$x_i=\sum_{k\in E_{11}^{(1)}\cup E_{12}^{(1)}\cup E_2^{(1)}} c_{ik}x_k+b_i\quad (i\in E_{11}^{(1)}\cup E_{12}^{(1)}\cup E_2^{(1)})\qquad(5.5.10)$$

的最小非负解;

(ii) $\{x_i^*,\ i\in E_{11}^{(2)}\cup E_{12}^{(2)}\cup E_2^{(2)}\}$ 是随机添尾严格非齐次方程

$$x_i=\sum_{k\in E_{11}^{(2)}\cup E_{12}^{(2)}\cup E_2^{(2)}} c_{ik}x_k+\Big(\sum_{k\in E_{11}^{(1)}\cup E_{12}^{(1)}\cup E_2^{(1)}} c_{ik}x_k^*+b_i\Big)$$
$$(i\in E_{11}^{(2)}\cup E_{12}^{(2)}\cup E_2^{(2)})\qquad(5.5.11)$$

的最小非负解,从而

$$x_i^*=+\infty\quad (i\in E_{11}^{(2)}\cup E_{12}^{(2)}\cup E_2^{(2)})\qquad(5.5.12)$$

系 5.5.1. 第一型正则方程有有限最小非负解的充要条件是它是第一型相容方程.

系 5.5.2. 第一型正则方程有唯一(有限)解的充要条件是它是第一型通外方程.

系 5.5.3. 第一型正则方程若有唯一(有限)解,则其与最小非负解重合.

系 5.5.4. 第一型正则方程的最小非负解(即任一非负解)恒等于无穷的充要条件是它是随机添尾严格非齐次方程.

定义 5.5.1. E_2 的元素称为 C 的通外足码.

系 5.5.5. 第一型正则方程是第一型通外方程的充要条件是其右边系数矩阵的每个足码都是通外足码.

§5.6. 拟规格方程

定义 5.6.1. 若第一型固壹方程

$$x_i=\sum_{k\in E} c_{ik}x_k+b_i\quad (i\in E)\qquad(5.6.1)$$

满足条件

$$\sum_{k\in E} c_{ik}+b_i\leqslant 1 \quad (i\in E) \tag{5.6.2}$$

则把它叫做拟规格方程；若(5.6.2)对一切 $i\in E$ 成立等号，则称它为规格方程.

定理 5.6.1. 若(5.6.1)是拟规格方程，则

$$0\leqslant x_i^*\leqslant 1 \quad (i\in E) \tag{5.6.3}$$

证．令

$$\left.\begin{array}{l} x_i^{(0)}=0 \quad (i\in E) \\ x_i^{(n+1)}=\sum_{k\in E} c_{ik}x_k^{(n)}+b_i \quad (n\geqslant 1,\ i\in E)\end{array}\right\} \tag{5.6.4}$$

易证

$$0\leqslant x_i^{(n)}\leqslant 1 \quad (n\geqslant 1,\ i\in E) \tag{5.6.5}$$

于是，由定理 3.2.1 立得(5.6.3)．定理证毕.

定理 5.6.2. 设(5.6.1)是拟规格方程．若 $i\underset{C}{\leadsto} j$ 及 $x_i^*=1$，则 $x_j^*=1$.

证．由 $i\underset{C}{\leadsto} j$ 知，存在 E 的有限子集 $\{i, j_1,\cdots,j_s, j\}$ 使

$$c_{ij_1}c_{j_1j_2}\cdots c_{j_sj}>0 \tag{5.6.6}$$

若 $x_{j_1}^*<1$，则由定理 5.6.1 知

$$\begin{aligned} x_i^* &= \sum_{k\in E} c_{ik}x_k^*+b_i=\sum_{k\neq j_1} c_{ik}x_k^*+c_{ij_1}x_{j_1}^*+b_i \\ &< \sum_{k\neq j_1} c_{ik}+c_{ij_1}+b_i=\sum_{k\in E} c_{ik}+b_i\leqslant 1 \end{aligned} \tag{5.6.7}$$

这与 $x_i^*=1$ 的假设矛盾，故必有 $x_{j_1}^*=1$．同理依次可证 $x_{j_2}^*=1$，$\cdots$，$x_{j_s}^*=1$．于是定理获证.

系 5.6.1. 设(5.6.1)是拟规格方程．若 $i\underset{C}{\leftrightsquigarrow} j$，则 x_i^* 与 x_j^* 同时等于 1 或同时小于 1.

定理 5.6.3. 若(5.6.1)是非齐次规格方程，则下列四命题等价:

(i)

$$x_i^*\equiv 1 \quad (i\in E) \tag{5.6.8}$$

(ii) 方程组 (5.6.1) 没有非负非常数的有界解;

(iii) 方程组 (5.6.1) 没有非常数的有界解;

(iv) 方程组 (5.6.1) 没有 $\inf\limits_{i\in E} x_i = 0$ 的非负解 $x_i (i\in E)$.

证. 分成下列几步:

(A) 试证 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii).

设 (i) 成立,即 $x_i^* \equiv 1\ (i\in E)$,则由定理 3.2.3 立得 (ii). 反之,设 (ii) 成立,于是由定理 5.6.1 知 $x_i^* \equiv c\ (i\in E)$. 由 (5.6.1) 是非齐次方程知,存在足码 $s\in E$ 及 $b_s \neq 0$. 把 $x_i^* \equiv c\ (i\in E)$ 代入 (5.6.1) 的第 s 个方程得

$$c = c\sum_{k\in E} c_{sk} + b_s \tag{5.6.9}$$

因 (5.6.1) 是规格方程,所以

$$1 - \sum_{k\in E} c_{sk} = b_s \neq 0 \tag{5.6.10}$$

由 (5.6.9) 和 (5.6.10) 得

$$c = \frac{b_s}{1-\sum\limits_{k\in E} c_{sk}} = 1 \tag{5.6.11}$$

于是 (i) 成立. 故 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii).

(B) 试证 (i) $\Longleftrightarrow$ (iii).

设 (i) 成立,则由定理 3.2.4 立得 (iii); 反之,设 (iii) 成立,于是 (ii) 成立. 然已证 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii),故 (i) 成立. 于是 (i) $\Longleftrightarrow$ (iii).

(C) 试证 (i) $\Longleftrightarrow$ (iv).

设 (i) 成立,于是

$$\inf x_i^* = 1 > 0 \tag{5.6.12}$$

由 $x_i^* (i\in E)$ 之最小性立得 (iv); 反之,设 (iv) 成立,于是

$$\inf_{i\in E} x_i^* = c > 0.$$

显然, $x_i \equiv 1\ (i\in E)$ 是 (5.6.1) 的一个非负解,这时

$$x_i = 1 \leqslant \frac{1}{c} x_i^* \leqslant \left(1+\frac{1}{c}\right) x_i^* \quad (i\in E) \tag{5.6.13}$$

于是，由定理 3.2.3 得

$$x_i^* \equiv x_i \equiv 1 \quad (i \in E) \tag{5.6.14}$$

从而 (i) 成立。于是 (i)$\Longleftrightarrow$(iv)。

至此，定理证毕。

系 5.6.2. 若 $b_i \geqslant c > 0 \ (i \in E)$，则规格方程 (5.6.1) 的最小非负解

$$x_i^* \equiv 1 \quad (i \in E) \tag{5.6.15}$$

§ 5.7. 有限维拟规格方程

定义 5.7.1. 若 n 维规格方程又是第一型通外方程，则称为规格通外方程。

显见，n 维规格方程是规格通外方程的充分必要条件是它是严格非齐次的。

引理 5.7.1. 规格通外方程

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_k + b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{5.7.1}$$

有唯一(有限)解 $\bar{x}_i \equiv 1 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$，从而其最小非负解 $x_i^* \equiv \bar{x}_i \equiv 1 \ (i \in E)$。

证. 显见 $x_i \equiv 1 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 (5.7.1) 的一个(有限)解，于是由定理 5.2.1 立得此引理。

设

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_k + b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{5.7.2}$$

是 n 维拟规格方程。

令

$$g_{ij} = \begin{cases} c_{ik}, & i, k = 1, 2, \cdots, n \\ 1 - \left(\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} + b_i \right), & i = 1, 2, \cdots, n, \ k = 0 \\ 0, & i = 0, \ k = 1, 2, \cdots, n \\ 1, & i = k = 0 \end{cases} \tag{5.7.3}$$

构造矩阵

$$G=(g_{ij},\ i,\ j\in(0,1,2,\cdots,n)) \tag{5.7.4}$$

定义 5.7.2. 若 n 维拟规格方程(5.7.2)满足条件

$$i \underset{G}{\rightsquigarrow} 0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5.7.5}$$

则称它为通补方程.

由

$$1-\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \geqslant 1-\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}+b_i\right)(i=1,2,\cdots,n) \tag{5.7.6}$$

知,通补方程必是第一型通外方程.

下面假定(5.7.2)是严格非齐次通补方程.

引理 5.7.2. 严格非齐次通补方程(5.7.2)有如下的性质:

(i) 它有唯一(有限)解 $\bar{x}_i\ (i=1,2,\cdots,n)$;

(ii) 它的最小非负解 $x_i^*(i=1,2,\cdots,n)$ 与它的唯一(有限)解 $\bar{x}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 重合;

(iii)

$$0<x_i^*<1 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5.7.7}$$

证. 由通补方程必是第一型通外方程及定理 5.2.1 知(i)与(ii)真. (5.7.7)的前半部分由(5.7.2)是严格非齐次方程和系 4.2.1 知是正确的,往证(5.7.7)的后半部分.

不失一般性,可设

$$C=\begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_g & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_{g+1,1} & C_{g+1,2} & \cdots & C_{g+1,g} & C_{g+1} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{l,1} & C_{l,2} & & & & & C_{l,l-1} & C_l \end{pmatrix} \tag{5.7.8}$$

其中 $C_j(j=1,2,\cdots,l)$ 是第一型不可约通外矩阵,对每个固定的 $j(j=g+1,g+2,\cdots,l)$ 诸 $C_{jk}(1\leqslant k<j)$ 至少有一个不

为零矩阵.

以 $E_i(i=1,2,\cdots,l)$ 表示 C_i 的足码集.由系 3.4.1 知, $\{x_i^*, i\in E_1\}$ 是拟规格方程

$$x_i = \sum_{k\in E_1} c_{ik}x_k + b_i \quad (i\in E_1) \tag{5.7.9}$$

的最小非负解,由 (5.7.5) 和 (5.7.8) 知,存在足码 $j\in E_1$, 使

$$\sum_{k\in E_1} C_{jk} + b_j < 1 \tag{5.7.10}$$

由定理 5.6.1 知

$$0 \leqslant x_i^* \leqslant 1 \quad (i\in E_1) \tag{5.7.11}$$

由 (5.7.10) 和 (5.7.11) 得

$$x_j^* = \sum_{k\in E_1} C_{jk}x_k^* + b_j \leqslant \sum_{k\in E_1} C_{jk} + b_j < 1 \tag{5.7.12}$$

由 C_1 是不可约矩阵及系 5.6.1 知

$$x_i^* < 1 \quad (i\in E_1) \tag{5.7.13}$$

同理可证

$$x_i^* < 1 \quad (i\in E_s) \tag{5.7.14}$$

其中 $s=2,3,\cdots,g$, 于是

$$x_i^* < 1 \quad \left(i\in \bigcup_{s=1}^{g} E_s\right) \tag{5.7.15}$$

显然

$$\bigcup_{j=g+1}^{l} E_j \overset{C}{\leadsto} \bigcup_{s=1}^{g} E_j \tag{5.7.16}$$

于是由 (5.7.15) 和定理 5.6.2 知

$$x_i^* < 1 \quad \left(i\in \bigcup_{j=g+1}^{l} E_j\right) \tag{5.7.17}$$

由(5.7.15)和(5.7.17)立得(5.7.7)的后半部分. 于是引理得证.

设

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}x_k + b_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5.7.18}$$

是 n 维拟规格方程. 令

$$t_{ik}=\begin{cases}c_{ik}, & i,\ k=1,2,\cdots,n\\ b_i, & i=1,2,\cdots,n,\ k=0\\ 0, & i=0,\ k=1,2,\cdots,n\\ 1, & i=k=0\end{cases} \tag{5.7.19}$$

构造矩阵

$$T=(t_{ik},\ i,\ k\in(0,1,\cdots,n)) \tag{5.7.20}$$

令

$$\hat{E}_1=(i:\ i\in(1,2,\cdots,n),\ i \underset{T}{\not\rightsquigarrow} 0) \tag{5.7.21}$$

$$\hat{E}_2=(i:\ i\in(1,2,\cdots,n),\ i \underset{T}{\rightsquigarrow} 0) \tag{5.7.22}$$

$$\hat{g}_{ik}=\begin{cases}c_{ik}, & i,\ k\in\hat{E}_2\\ 1-\left(\sum\limits_{j\in\hat{E}_2}c_{ij}+b_i\right) & i\in\hat{E}_2,\ k=0\\ 0, & i=0,\ k\in\hat{E}_2\\ 1, & i=k=0\end{cases} \tag{5.7.23}$$

构造矩阵

$$\hat{G}=(\hat{g}_{ik},\ i,\ k\in\{0\}\cup\hat{E}_2) \tag{5.7.24}$$

令

$$\hat{E}_{21}=(i:\ i\in\hat{E}_2\ 且\ i \underset{\hat{G}}{\not\rightsquigarrow} 0) \tag{5.7.25}$$

$$\hat{E}_{22}=(i:\ i\in\hat{E}_2\ 且\ i \underset{\hat{G}}{\rightsquigarrow} 0) \tag{5.7.26}$$

定理 5.7.1. n 维拟规格方程(5.7.18)的最小非负解 $x_i^*(i=1,2,\cdots,n)$ 如下唯一决定:

(i) $\{x_i^*,\ i\in\hat{E}_1\}$ 是齐次方程

$$x_i=\sum_{k\in\hat{E}_1}c_{ik}x_k \quad (i\in E_1) \tag{5.7.27}$$

的零解,从而

$$x_i^*\equiv 0 \quad (i\in\hat{E}_1) \tag{5.7.28}$$

(ii) $\{x_i^*,\ i\in\hat{E}_{21}\}$ 是规格通外方程

$$x_i=\sum_{k\in\hat{E}_2}c_{ik}x_k+b_i \quad (i\in\hat{E}_{21}) \tag{5.7.29}$$

的唯一(有限)解,从而

$$x_i^* \equiv 1 \quad (i \in \hat{E}_{21}) \tag{5.7.30}$$

(iii) $\{x_i^*, i \in \hat{E}_{22}\}$ 是严格非齐次通补方程

$$x_i = \sum_{k \in \hat{E}_{22}} c_{ik} x_k + \left(\sum_{k \in \hat{E}_{21}} c_{ik} x_k^* + b_i \right) \quad (i \in \hat{E}_{22}) \tag{5.7.31}$$

的唯一(有限)解,从而

$$0 < x_i^* < 1 \quad (i \in \hat{E}_{22}) \tag{5.7.32}$$

证. 由引理 5.7.1 和引理 5.7.2 立得我们的定理.

系 5.7.1. n 维拟规格方程的最小非负解 $x_i^* \equiv 0(i = 1, 2, \cdots, n)$, $x_i^* \equiv 1(i = 1, 2, \cdots, n)$ 及 $0 < x_i^* < 1(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的充要条件分别是它是齐次方程,规格通外方程及严格非齐次通补方程.

注 5.7.1. 若 (5.7.18) 是 n 维规格方程,则

(i) (5.7.27) 是随机齐次方程;

(ii) $\hat{E}_{21}$, $\hat{E}_{22}$ 可简单确定如下:

$$\hat{E}_{21} = (i: \ i \in \hat{E}_2, \ i \underset{C}{\not\rightsquigarrow} \hat{E}_1) \tag{5.7.33}$$

$$\hat{E}_{22} = (i: \ i \in \hat{E}_2, \ i \underset{C}{\rightsquigarrow} \hat{E}_1) \tag{5.7.34}$$

§ 5.8. 第二型正则方程

定义 5.8.1. 若第二型正则方程

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_k + b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{5.8.1}$$

的右边系数矩阵 $C = (c_{ik})$ 的转置是第一型通外(第一型组合随机)矩阵,则称为第二型通外(第二型组合随机)方程.

容易证明

引理 5.8.1. 若 (5.8.1) 是第二型通外方程,则它有唯一(有限)解,且其最小非负解就等于其唯一(有限)解.

引理 5.8.2. 第二型组合随机齐次方程

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{5.8.2}$$

有无穷多个(有限)解,其最小非负解 $x_i^*(i=1,2,\cdots,n)$ 与零解重合,即

$$x_i^* \equiv 0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5.8.3}$$

引理 5.8.3. 若(5.8.1)是第二型组合随机严格非齐次方程,则其最小非负解

$$x^* \equiv +\infty \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5.8.4}$$

设(5.8.1)是第二型正则方程. 令

$$t_{ik}=\begin{cases} c_{ik}, & i,\ k=1,2,\cdots,n \\ b_i, & i=1,2,\cdots,n,\ k=0 \\ 0, & i=0,\ k=1,2,\cdots,n \\ 1, & i=k=0 \end{cases} \tag{5.8.5}$$

构造矩阵

$$T=(t_{ik},\ i,\ k\in(0,1,\cdots,n)) \tag{5.8.6}$$

令

$$E_1=(i:\ i\in(1,2,\cdots,n),\ i \underset{T}{\not\rightsquigarrow} 0) \tag{5.8.7}$$

$$E_2=(i:\ i\in(1,2,\cdots,n),\ i \underset{T}{\rightsquigarrow} 0) \tag{5.8.8}$$

$$C_1=(c_{ik},\ i,\ k\in E_1) \tag{5.8.9}$$

$$E_{11}= \text{矩阵 } C_1 \text{ 的转置矩阵 } C_1' \text{ 的通外足码集} \tag{5.8.10}$$

$$E_{12}=E_1\backslash E_{11} \tag{5.8.11}$$

$$C_{12}=(c_{ik},\ i,\ k\in E_{12}) \tag{5.8.12}$$

$$E_{12}^{(1)}= \text{矩阵 } C_{12} \text{ 的非本质足码集} \tag{5.8.13}$$

$$E_{12}^{(2)}=E_{12}\backslash E_{12}^{(1)} \tag{5.8.14}$$

$$C_2=(c_{ik},\ i,\ k\in E_2) \tag{5.8.15}$$

$$E_{21}= \text{矩阵 } C_2' \text{ 的通外足码集} \tag{5.8.16}$$

$$E_{22}=E_2\backslash E_{21} \tag{5.8.17}$$

$$C_{22}=(c_{ik},\ i,\ k\in E_{22}) \tag{5.8.18}$$

$$E_{22}^{(1)}= \text{矩阵 } C_{22} \text{ 的非本质足码集} \tag{5.8.19}$$

$$E_{22}^{(2)}=E_{22}\backslash E_{22}^{(1)} \tag{5.8.20}$$

定义 5.8.2. 若

$$E_{22}^{(2)}=\varnothing \tag{5.8.21}$$

则称(5.8.1)为第二型相容方程.

注 5.8.1. 显见,当且仅当

$$E_{12}^{(2)} \cup E_{22}^{(2)} = \varnothing \tag{5.8.22}$$

时,(5.8.1)始为第二型通外方程;当且仅当

$$E_{22}^{(2)} = (1, 2, \cdots, n) \tag{5.8.23}$$

时,(5.8.1)始为第二型组合随机严格非齐次方程.

定理 5.8.1. 第二型正则方程(5.8.1)的最小非负解如下唯一决定:

(i) $\{x_i^*, i \in E_{11} \cup E_{12}^{(1)}\}$ 是第二型通外齐次方程

$$x_i = \sum_{k \in E_{11} \cup E_{12}^{(1)}} c_{ik} x_k \quad (i \in E_{11} \cup E_{12}^{(1)}) \tag{5.8.24}$$

的唯一(有限)解,从而

$$x_i^* = 0 \quad (i \in E_{11} \cup E_{12}^{(1)}) \tag{5.8.25}$$

(ii) $\{x_i^*, i \in E_{12}^{(2)}\}$ 是第二型组合随机齐次方程

$$x_i = \sum_{k \in E_{12}^{(2)}} c_{ik} x_k \quad (i \in E_{12}^{(2)}) \tag{5.8.26}$$

的零解,即

$$x_i^* = 0 \quad (i \in E_{12}^{(2)}) \tag{5.8.27}$$

(iii) $\{x_i^*, i \in E_{21} \cup E_{22}^{(1)}\}$ 是第二型通外严格非齐次方程

$$x_i = \sum_{k \in E_{21} \cup E_{22}^{(1)}} c_{ik} x_k + b_i \quad (i \in E_{21} \cup E_{22}^{(1)}) \tag{5.8.28}$$

的唯一(有限)解;

(iv) $\{x_i^*, i \in E_{22}^{(2)}\}$ 是第二型组合随机严格非齐次方程

$$x_i = \sum_{k \in E_{22}^{(2)}} c_{ik} x_k + \left(\sum_{k \in E_{21} \cup E_{22}^{(1)}} c_{ik} x_k^* + b_i \right) \quad (i \in E_{22}^{(2)}) \tag{5.8.29}$$

的最小非负解,从而

$$x_i^* = +\infty \quad (i \in E_{22}^{(2)}) \tag{5.8.30}$$

证. 由引理 5.8.1,引理 5.8.2,引理 5.8.3 及注 5.8.1 立得我们的定理.

系 5.8.1. 第二型正则方程有有限最小非负解的充要条件是

它是第二型相容方程.

系 5.8.2. 第二型正则方程有唯一(有限)解的充要条件是它是第二型通外方程.

系 5.8.3. 若第二型正则方程有唯一(有限)解,则其最小非负解与之重合.

系 5.8.4. 第二型正则方程的最小非负解恒等于无穷的充要条件是它是第二型组合随机严格非齐次方程.

第三篇　齐次可列马尔可夫链

第六章　一 般 理 论

§6.1. 引　　言

设 $X = \{x_n(\omega),\ 0 \leqslant n < \zeta(\omega) + 1,\ \omega \in \Omega\}$ 是定义在概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的齐次可列马尔可夫链（以下简称马氏链），其相空间为 $E = (1, 2, \cdots)$，其转移概率矩阵为 $P = (p_{ij},\ i, j \in E)$．若 $P(\zeta(\omega) = +\infty) = 1$，则称 X 为不断的马氏链．

本章主要研究马氏链的转移概率、第一次到达时间的分布和矩、到达次数的分布和矩、状态的常返判别准则、可加泛函的分布和矩以及状态空间的 Blackweel 分解等问题．

§6.2. 转 移 概 率

设 A, H 为 E 的子集且 $A \neq \emptyset$．令

$$ {}_Hp_{iA}^{(n)} = P(x_n \in A,\ x_\nu \notin H,\ 0 < \nu < n \mid x_0 = i) \tag{6.2.1}$$

$$ {}_Hp_{iA}^{(\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} {}_Hp_{iA}^{(n)}\lambda^n \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1) \tag{6.2.2}$$

$$ {}_Hp_{iA}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} {}_Hp_{iA}^{(n)} \tag{6.2.3}$$

定理 6.2.1. $\{{}_Hp_{iA}(\lambda),\ i \in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$ x_i = \sum_{j \in E} \lambda p_{ij} x_j + \lambda p_{iA} \quad (i \in E) \tag{6.2.4}$$

的最小非负解．

证．显然 (6.2.4) 是第一型囿壹方程．因为

$$
\left.\begin{aligned}
{}_H p_{iA}^{(1)} &= p_{iA} \quad (i \in E) \\
{}_H p_{iA}^{(n+1)} &= \sum_{j \in E \setminus H} p_{ijH} \quad p_{jA}^{(n)} \quad (i \in E,\ n \geqslant 1)
\end{aligned}\right\} \tag{6.2.5}
$$

所以

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda_H p_{iA}^{(1)} &= \lambda p_{iA} \quad (i \in E) \\
\lambda^{n+1}{}_H p_{iA}^{(n+1)} &= \sum_{j \in E \setminus H} \lambda p_{ij} \quad \lambda^n{}_H p_{jA}^{(n)} \quad (i \in E,\ n \geqslant 1)
\end{aligned}\right\} \tag{6.2.6}
$$

由(6.2.2),(6.2.6)以及定理 3.2.3 立得我们的定理.

定理 6.2.2. $\{{}_H p_{iA}^*,\ i \in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$
x_i = \sum_{j \in E \setminus H} p_{ij} x_j + p_{iA} \quad (i \in E) \tag{6.2.7}
$$

的最小非负解.

证. 本定理乃是定理 6.2.1 在 $\lambda = 1$ 下之特例.

定理 6.2.3. $\{{}_H p_{ij}(\lambda),\ j \in E\}$ 是第二型囿壹方程

$$
x_j = \sum_{k \in E \setminus H} \lambda p_{kj} x_k + \lambda p_{ij} \quad (j \in E) \tag{6.2.8}
$$

的最小非负解.

证. 由定理 6.2.1 及定理 3.8.1 立得我们的定理.

定理 6.2.4. $\{{}_H p_{ij}^*,\ j \in E\}$ 是第二型囿壹方程

$$
x_j = \sum_{k \in E \setminus H} p_{kj} x_k + p_{ij} \quad (j \in E) \tag{6.2.9}
$$

的最小非负解.

证. 本定理乃是定理 6.2.3 在 $\lambda = 1$ 下之特例.

令

$$
e_{hj} = \sum_{n=1}^{\infty} {}_h p_{hj}^{(n)} \tag{6.2.10}
$$

定理 6.2.5. $\{e_{hj},\ j \in E\}$ 是第二型囿壹方程

$$
x_j = \sum_{k \neq h} p_{kj} x_k + p_{hj} \quad (j \in E) \tag{6.2.11}
$$

的最小非负解.

证．由

$$\left.\begin{aligned} {}_hp_{hj}^{(1)} &= p_{hj} \quad (j\in E) \\ {}_hp_{hj}^{(n+1)} &= \sum_{k\neq h} {}_hp_{hk}^{(n)}\cdot p_{kj} \quad (n\geqslant 1,\ j\in E) \end{aligned}\right\} \tag{6.2.12}$$

以及系 3.2.3 立得所欲证．

§ 6.3. 第一次到达时间的分布和矩

令

$$ {}_Hf_{iA}^{(n)} = P(x_\nu \notin A\cup H,\ 0<\nu<n,\ x_n\in A\,|\,x_0=i) \tag{6.3.1}$$

$$ {}_H\Phi_{iA}(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_Hf_{iA}^{(n)}\lambda^n \quad (0\leqslant\lambda\leqslant 1) \tag{6.3.2}$$

$$ {}_Hm_{iA}^{(p)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^p\cdot {}_Hf_{iA}^{(n)} \quad (p=0,1,\cdots) \tag{6.3.3}$$

$$ {}_Hf_{iA}^{*} = {}_H\Phi_{iA}(1) = {}_Hm_{iA}^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} {}_Hf_{iA}^{(n)} \tag{6.3.4}$$

定理 6.3.1. $\{{}_H\Phi_{iA}(\lambda),\ i\in E\}$ 是拟规格方程

$$ x_i = \sum_{k\notin A\cup H} \lambda p_{ik}x_k + \lambda p_{iA} \quad (i\in E) \tag{6.3.5}$$

的最小非负解．

证．因为

$$\left.\begin{aligned} {}_Hf_{iA}^{(1)} &= p_{iA} \quad (i\in E) \\ {}_Hf_{iA}^{(n+1)} &= \sum_{k\notin A\cup H} p_{ik}\cdot {}_Hf_{kA}^{(n)} \quad (n\geqslant 1,\ i\in E) \end{aligned}\right\} \tag{6.3.6}$$

所以

$$\left.\begin{aligned} \lambda\,{}_Hf_{iA}^{(1)} &= \lambda p_{iA} \quad (i\in E) \\ \lambda^{n+1}\,{}_Hf_{iA}^{(n+1)} &= \sum_{k\notin A\cup H} \lambda p_{ik}\cdot \lambda^n\,{}_Hf_{kA}^{(n)} \quad (n\geqslant 1;\ i\in E) \end{aligned}\right\} \tag{6.3.7}$$

由 (6.3.2)，(6.3.7) 以及系 3.2.3 立得，$\{{}_H\Phi_{iA}(\lambda),\ i\in E\}$ 是(6.3.5)的最小非负解．显见 (6.3.5) 是拟规格方程．于是，定理获证．

定理 6.3.2. $\{{}_Hf_{iA}^*;\ i\in E\}$ 是拟规格方程

$$x_i = \sum_{k\notin A\cup H} p_{ik}x_k + p_{iA} \quad (i\in E) \tag{6.3.8}$$

的最小非负解.

证. 本定理乃是定理 6.3.1 在 $\lambda = 1$ 下之特例.

当 ${}_Hm_{iA}^{(p-1)} = +\infty$ 时,下面我们约定

$$\sum_{l=1}^{p} (-1)^{l-1}C_p^l\,{}_Hm_{iA}^{(p-l)} = +\infty \tag{6.3.9}$$

其中 C_p^l 表示从 p 个元素里每次取出 l 个的所有不同的组合种数.

定理 6.3.3. 对于 $p\geqslant 1$, $\{{}_Hm_{iA}^{(p)};\ i\in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$x_i = \sum_{k\notin A\cup H} p_{ik}x_k + \sum_{l=1}^{p}(-1)^{l-1}C_p^l\,{}_Hm_{iA}^{(p-l)} \quad (i\in E) \tag{6.3.10}$$

的最小非负解.

证. 显见,(6.3.10)是第一型囿壹方程. 由(6.3.6)得

$$\left.\begin{aligned}
&1^p\,{}_Hf_{iA}^{(1)} = p_{iA} \quad (i\in E)\\
&(n+1)^p\cdot{}_Hf_{iA}^{(n+1)} = \sum_{k\notin A\cup H} p_{ik}\cdot n^p\cdot{}_Hf_{kA}^{(n)}\\
&\quad+\sum_{l=1}^{p} C_p^l \sum_{k\notin A\cup H} p_{ik}\cdot n^{p-l}\cdot{}_Hf_{kA}^{(n)} \quad (n\geqslant 1,\ i\in E)
\end{aligned}\right\} \tag{6.3.11}$$

由(6.3.3),(6.3.11)及系 3.2.2 知, $\{{}_Hm_{iA}^{(p)};\ i\in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$x_i = \sum_{k\notin A\cup H} p_{ik}x_k + \sum_{l=1}^{p} C_p^l \sum_{k\notin A\cup H} p_{ik}\cdot{}_Hm_{kA}^{(p-l)} + p_{iA} \quad (i\in E) \tag{6.3.12}$$

的最小非负解. 故只需证明

$$\sum_{l=1}^{p} C_p^l \sum_{k\notin A\cup H} p_{ik}\,{}_Hm_{kA}^{(p-l)} + p_{iA} = \sum_{l=1}^{p}(-1)^{l-1}C_p^l\,{}_Hm_{iA}^{(p-l)} \quad (i\in E) \tag{6.3.13}$$

就够了.

下面分两种情况证明(6.3.13).

(i) ${}_Hm_{iA}^{(p-1)} = +\infty$.

$$\because \quad C_p^l = \frac{p!}{l!(p-l)!} = \frac{p}{l}\,\frac{(p-1)!}{(l-1)!((p-1)-(l-1))!}$$

$$= \frac{p}{l} C_{p-1}^{l-1} \geqslant C_{p-1}^{l-1} \quad (1 \leqslant l \leqslant p) \tag{6.3.14}$$

$$\therefore \quad \sum_{l=1}^{p} C_p^l \sum_{k \notin A\cup H} p_{ik} \cdot {}_Hm_{kA}^{(p-l)} + p_{iA}$$

$$\geqslant \sum_{l=1}^{p} C_{p-1}^{l-1} \sum_{k \notin A\cup H} p_{ik} \cdot {}_Hm_{kA}^{((p-1)-(l-1))} + p_{iA}$$

$$= \sum_{l=0}^{p-1} C_{p-1}^{l} \sum_{k \notin A\cup H} p_{ik}\,{}_Hm_{kA}^{((p-1)-l)} + p_{iA}$$

$$= {}_Hm_{iA}^{(p-1)} = +\infty \tag{6.3.15}$$

于是,根据(6.3.9)立得(6.3.13).

(ii) ${}_Hm_{iA}^{(p-1)} < +\infty$.

这时有

$${}_Hm_{iA}^{(p-l)} < +\infty, \quad (l = 1, 2, \cdots, p) \tag{6.3.16}$$

我们首先证明

$$\sum_{l=1}^{p} C_p^l \sum_{s=0}^{p-l} C_{p-l}^s (-1)^s {}_Hm_{iA}^{(p-l-s)} + \sum_{s=1}^{p} (-1)^s C_p^s\, {}_Hm_{iA}^{(p-s)} = 0 \tag{6.3.17}$$

设

$$\sum_{l=1}^{p} C_p^l \sum_{s=0}^{p-l} C_{p-l}^s (-1)^s {}_Hm_{iA}^{(p-l-s)} + \sum_{s=1}^{p} (-1)^s C_p^s\, {}_Hm_{iA}^{(p-s)} = \sum_{l=1}^{p} \alpha_{p-l}\, {}_Hm_{iA}^{(p-l)} \tag{6.3.18}$$

然而,

$$z^p = [1 + (z-1)]^p = \sum_{l=0}^{p} C_p^l (z-1)^{p-l}$$

$$= \sum_{l=0}^{p} C_p^l \sum_{s=0}^{p-l} C_{p-l}^s (-1)^s z^{p-l-s} = \sum_{l=1}^{p} \alpha_{p-l} z^{p-l} + z^p \quad (6.3.19)$$

于是

$$\alpha_l = 0 \quad (l = 0, 1, \cdots, p-1) \qquad (6.3.20)$$

由(6.3.18)和(6.3.20)立得(6.3.17).

现在转向(6.3.13)的证明.由定理6.3.2知,(6.3.13)对 $p=1$ 真,今假定(6.3.13)对 $1, 2, \cdots, p-1$ 已真,从而

$$\sum_{l=1}^{p} C_p^l \sum_{k \in A \cup H} p_{ik}\ {}_H m_{kA}^{(p-l)} + p_{iA}$$

$$= \sum_{l=1}^{p-1} C_p^l \Big[\sum_{k \in A \cup H} p_{ik}\ {}_H m_{kA}^{(p-l)} + \sum_{s=1}^{p-l} (-1)^{s-1} C_{p-l}^s\ {}_H m_{iA}^{(p-l-s)}$$

$$+ \sum_{s=1}^{p-l} (-1)^s C_{p-l}^s\ {}_H m_{iA}^{(p-l-s)} \Big] + \sum_{k \in A \cup H} p_{ik} \cdot {}_H f_{iA}^* + p_{iA}$$

$$= \sum_{l=1}^{p-1} C_p^l \Big[{}_H m_{iA}^{(p-l)} + \sum_{s=1}^{p-l} (-1)^s C_{p-l}^s\ {}_H m_{iA}^{(p-l-s)} \Big] + {}_H f_{iA}^*$$

$$= \sum_{l=1}^{p-1} C_p^l \sum_{s=0}^{p-l} (-1)^s C_{p-l}^s\ {}_H m_{iA}^{(p-l-s)} + {}_H m_{iA}^{(0)}$$

$$= \sum_{l=1}^{p} C_p^l \sum_{s=0}^{p-l} (-1)^s C_{p-l}^s\ {}_H m_{iA}^{(p-l-s)} = \sum_{s=1}^{p} (-1)^{s-1} C_p^s\ {}_H m_{iA}^{(p-s)}$$

$$= \sum_{l=1}^{p} (-1)^{l-1} C_p^l\ {}_H m_{iA}^{(p-l)} \qquad (6.3.21)$$

所以(6.3.13)对 p 亦真. 由归纳法知(6.3.13)成立. 定理的证明遂告完成.

定理 6.3.4. 若对某个常数 $0 < C < +\infty$ 有

$${}_H m_{iA} \leqslant C\ {}_H f_{iA}^* \quad (i \in E) \qquad (6.3.22)$$

则

$${}_H m_{iA}^{(p)} \leqslant p!\ C^p\ {}_H f_{iA}^* \quad (p \geqslant 1,\ i \in E) \qquad (6.3.23)$$

证. 由(6.3.22)知(6.3.23)对 $p=1$ 真. 今假定(6.3.23)对 $p-1$ 已真,即

$${}_H m_{iA}^{(p-1)} \leqslant (p-1)!\ C^{p-1}\ {}_H f_{iA}^* \quad (i \in E) \qquad (6.3.24)$$

往证(6.3.23)对 p 亦真.

由定理 6.3.3 知, $\{{}_H m_{iA},\ i \in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$x_i = \sum_{k \notin A \cup H} p_{ik} x_k + {}_H f_{iA}^* \quad (i \in E) \tag{6.3.25}$$

的最小非负解. 于是由系 3.3.3 知,若 x_i^* $(i \in E)$ 是第一型囿壹方程

$$x_i = \sum_{k \notin A \cup H} p_{ik} x_k + p!\, C^{p-1}\, {}_H f_{iA}^* \quad (i \in E) \tag{6.3.26}$$

的最小非负解,从而

$$x_i^* = p!\, C^{p-1}\, {}_H m_{iA} \quad (i \in E) \tag{6.3.27}$$

再由(6.3.22)得

$$x_i^* \leqslant p!\, C^p\, {}_H f_{iA}^* \quad (i \in E) \tag{6.3.28}$$

由定理 6.3.3 的证明过程知, $\{{}_H m_{iA}^{(p)},\ i \in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$x_i = \sum_{k \notin A \cup H} p_{ik} x_k + \sum_{l=1}^{p} C_p^l \sum_{k \notin A \cup H} p_{ik} \cdot {}_H m_{kA}^{(p-l)} + p_{iA} \quad (i \in E) \tag{6.3.29}$$

的最小非负解. 然由

$$C_p^l = \frac{p}{l} C_{p-1}^{l-1} \leqslant p C_{p-1}^{l-1} \quad (1 \leqslant l \leqslant p) \tag{6.3.30}$$

及(6.3.24)得

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{p} C_p^l \sum_{k \notin A \cup H} p_{ik}\, {}_H m_{kA}^{(p-l)} + p_{iA} \\
&\leqslant p\left(\sum_{l=1}^{p} C_{p-1}^{l-1} \sum_{k \notin A \cup H} p_{ik} \cdot {}_H m_{kA}^{((p-1)-(l-1))} + p_{iA}\right) \\
&= p\left(\sum_{l=0}^{p-1} C_{p-1}^{l} \sum_{k \notin A \cup H} p_{ik} \cdot {}_H m_{kA}^{((p-1)-l)} + p_{iA}\right) \\
&= p\, {}_H m_{iA}^{(p-1)} \leqslant p!\, C^{p-1}\, {}_H f_{iA}^* \quad (i \in E)
\end{aligned} \tag{6.3.31}$$

于是由定理 6.3.1 得

$${}_H m_{iA}^{(p)} \leqslant x_i^* \quad (i \in E) \tag{6.3.32}$$

由(6.3.28)和(6.3.32)知(6.3.23)对 p 亦真. 于是由归纳法知(6.2.3)真. 定理证毕.

§ 6.4. 齐次有限马氏链的第一次到达时间的分布和矩

本章各结果对齐次有限马氏链不但成立，而且大都还可加强．由于对齐次有限马氏链前人已研究得相当彻底，故未把它作为本书的一个重点而另立一章讨论，今只是把它的第一次到达时间的分布和矩这个前人尚未很好进行研究而又十分重要的问题在这里讨论一番．

设有齐次有限不断马氏链 $\{x_n, n \geqslant 0\}$，其相空间为 $E=(1, 2, \cdots, n)$．令

$$G(j)=(i: i \in E, i \rightsquigarrow j) \tag{6.4.1}$$

$$\bar{G}(j)=(i: i \in E, i \not\rightsquigarrow j)=E \backslash G(j) \tag{6.4.2}$$

$$\bar{G}^{(1)}(j)=(i: i \in \bar{G}(j), i \rightsquigarrow G(j)) \tag{6.4.3}$$

$$\bar{G}^{(2)}(j)=(i: i \in \bar{G}(j), i \not\rightsquigarrow G(j))=\bar{G}(j) \backslash \bar{G}^{(1)}(j) \tag{6.4.4}$$

本节中所用到的其余记号与 § 6.2 和 § 6.3 的相同．

容易证明下列各结果．

定理 6.4.1 $\{f_{ij}(\lambda), i \in E\}$ 是 n 维拟规格方程

$$x_i=\sum_{k \neq j} \lambda p_{ik} x_k+\lambda p_{ij} \quad (i \in E) \tag{6.4.5}$$

的最小非负解．

定理 6.4.2. $\{f_{ij}^*, i \in E\}$ 是 n 维规格方程

$$x_i=\sum_{k \neq j} p_{ik} x_k+p_{ij} \quad (i \in E) \tag{6.4.6}$$

的最小非负解，从而

(i)

$$f_{ij}^*=0 \quad (i \in G(j)) \tag{6.4.7}$$

(ii)

$$f_{ij}^*=1 \quad (i \in \bar{G}^{(1)}(j)) \tag{6.4.8}$$

(iii) $\{f_{ij}^*, i \in \bar{G}^{(2)}(j)\}$ 是严格非齐次通补方程

$$x_i=\sum_{k \in \bar{G}^{(2)}(j) \backslash \{j\}} p_{ik} x_k+\sum_{k \in \bar{G}^{(1)}(j) \cup \{j\}} p_{ik} \quad (i \in \bar{G}^{(2)}(j)) \tag{6.4.9}$$

的唯一(有限)解,从而

$$0 < f_{ij}^{*} < 1 \quad (i \in \overline{G}^{(2)}(j)) \tag{6.4.10}$$

定理 6.4.3. $\{m_{ij};\ i \in E\}$ 是第一型相容方程

$$x_i = \sum_{k \neq j} p_{ik} x_j + f_{ij}^{*} \quad (i \in E) \tag{6.4.11}$$

的最小非负解,从而

$$m_{ij} < +\infty \quad (i \in E) \tag{6.4.12}$$

详言之

(i) $\{m_{ij};\ i \in G(j)\}$ 是随机齐次方程

$$x_i = \sum_{k \in (j) \setminus \{j\}} p_{ik} x_k \quad (i \in G(j)) \tag{6.4.13}$$

的零解,从而

$$m_{ij} = 0 \quad (i \in G(j)) \tag{6.4.14}$$

(ii) $\{m_{ij};\ i \in \overline{G}(j)\}$ 是第一型通外方程

$$x_i = \sum_{k \in \overline{G}(j) \setminus \{j\}} p_{ik} x_k + f_{ij}^{*} \quad (i \in \overline{G}(j)) \tag{6.4.15}$$

的唯一(有限)解.

定理 6.4.4. $\{m_{ij}^{(p)};\ i \in E\}$ 是第一型相容方程

$$x_i = \sum_{k \neq j} p_{ik} x_k + \sum_{l=1}^{p} (-1)^{l-1} C_p^l m_{ij}^{(p-l)} \quad (i \in E) \tag{6.4.16}$$

的最小非负解,从而

$$m_{ij}^{(p)} < +\infty \quad (i \in E) \tag{6.4.17}$$

详言之,

(i) $\{m_{ij}^{(p)};\ i \in G(j)\}$ 是随机齐次方程

$$x_i = \sum_{k \in G(j) \setminus \{j\}} p_{ik} x_k \quad (i \in G(j)) \tag{6.4.18}$$

的零解,从而

$$m_{ij}^{(p)} = 0 \quad (i \in G(j)) \tag{6.4.19}$$

(ii) $\{m_{ij}^{(p)};\ i \in \overline{G}(j)\}$ 是第一型通外方程

$$x_i = \sum_{k \in \overline{G}(j) \setminus \{j\}} p_{ik} x_k + \sum_{l=1}^{p} (-1)^{l-1} C_p^l m_{ij}^{(p-l)} \quad (i \in \overline{G}(j)) \tag{6.4.20}$$

的唯一(有限)解,且

$$m_{ij}^{(p)} \leqslant p!\,c^p f_{ij}^* \quad (j \in \overline{G}(j)) \tag{6.4.21}$$

其中

$$0 < c = \max_{i \in \overline{G}(j)} \frac{m_{ij}}{f_{ij}^*} < +\infty \tag{6.4.22}$$

系 6.4.1. $f_{ij}(\lambda)$ 是 λ 的在 $|\lambda| < 1/c$ 中的解析函数,且

$$f_{ij}(\lambda) = \begin{cases} 0, & i \in G(j); \\ \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \dfrac{m_{ij}^{(p)}}{p!} \lambda^p, & |\lambda| < 1/c, \ i \in \overline{G}(j) \end{cases} \tag{6.4.23}$$

§6.5. 到达次数的分布和矩

设马氏链是不断的,令

$$k_{iA}^{(n)} = P(x_m \in A \text{ 恰好 } n \text{ 次},\ m > 0 \mid x_0 = i) \tag{6.5.1}$$

$$K_{iA}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{iA}^{(n)} \lambda^n \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1) \tag{6.5.2}$$

$$K_{iA}^{(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} n^p k_{iA}^{(n)} \quad (p = 0, 1, \cdots) \tag{6.5.3}$$

$$K_{iA}^* = K_{iA}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{iA}^{(n)} \tag{6.5.4}$$

$$\overline{K}_{iA}^* = P(x_m \in A \text{ 无穷次},\ m \geqslant 0 \mid x_0 = i) \tag{6.5.5}$$

$$\sigma_A = \begin{cases} \inf(n:\ x_n \in A,\ n > 0), \text{如括号中的集非空} \\ +\infty, \text{相反的情况} \end{cases} \tag{6.5.6}$$

显见,σ_A 是不依赖于将来的随机变量.

定理 6.5.1. $\{K_{iA}(\lambda),\ i \in E\}$ 是拟规格方程

$$x_i = \sum_{j \in A} \lambda\ {}_A f_{ij}^* x_j + (1 - f_{iA}^*) \quad (i \in E) \tag{6.5.7}$$

的最小非负解.

证. 由

$$\sum_{j \in A} \lambda\ {}_A f_{ij}^* + (1 - f_{iA}^*) \leqslant \sum_{j \in A} {}_A f_{ij}^* + (1 - f_{iA}^*) = 1 \tag{6.5.8}$$

知(6.5.7)是拟规格方程. 显见有

$$k_{iA}^{(0)} = 1 - f_{iA}^{*} \quad (i \in E) \tag{6.5.9}$$

而

$$\begin{aligned}
k_{iA}^{(n+1)} &= P(x_m \in A \text{ 恰好 } (n+1) \text{ 次}, m > 0 \mid x_0 = i) \\
&= P(x_m \in A \text{ 恰好 } n \text{ 次}, m > \sigma_A \mid x_0 = i) \\
&= \sum_{j \in A} P(x(\sigma_A) = j,\ x_m \in A \text{ 恰好 } n \text{ 次}, m > \sigma_A \mid x_0 = i) \\
&= \sum_{j \in A} P(x(\sigma_A) = j \mid x_0 = i) P(x_m \in A \text{ 恰好 } n \text{ 次}, \\
&\quad m > \sigma_A \mid x_0 = i,\ x(\sigma_A) = j) \\
&= \sum_{j \in A} {}_A f_{ij}^{*} P(x_m \in A \text{ 恰好 } n \text{ 次}, m > 0 \mid x_0 = j) \\
&= \sum_{j \in A} {}_A f_{ij}^{*} k_{jA}^{(n)}
\end{aligned} \tag{6.5.10}$$

由(6.5.9)和(6.5.10)得

$$\left.\begin{aligned}
\lambda^0 k_{iA}^{(0)} &= 1 - f_{iA}^{*} \quad (i \in E) \\
\lambda^{n+1} k_{iA}^{(n+1)} &= \sum_{j \in A} \lambda\, {}_A f_{ij}^{*} \cdot \lambda^n k_{jA}^{(n)} \quad (i \in E,\ n \geqslant 1)
\end{aligned}\right\} \tag{6.5.11}$$

由(6.5.2),(6.5.11)及系 3.2.3 立得 $\{K_{iA}(\lambda), i \in E\}$ 是(6.5.7)的最小非负解. 于是定理获证.

定理 6.5.2. $\{K_{iA}^{*};\ i \in E\}$ 是拟规格方程

$$x_i = \sum_{j \in A} {}_A f_{ij}^{*} x_j + (1 - f_{iA}^{*}) \quad (i \in E) \tag{6.5.12}$$

的最小非负解.

证. 本定理乃是定理 6.5.1 在 $\lambda = 1$ 下之特例.

定理 6.5.3. 对于 $p \geqslant 1$, $\{K_{iA}^{(p)}; i \in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$x_i = \sum_{j \in A} {}_A f_{ij}^{*} x_j + \sum_{l=1}^{p} (-1)^{l-1} K_{iA}^{(p-l)} + (-1)^{p} (1 - f_{iA}^{*}) \quad (i \in E) \tag{6.5.13}$$

的最小非负解. 这里约定,当 $K_{iA}^{(p-1)} = +\infty$ 时,令

$$\sum_{l=1}^{p}(-1)^{l-1}K_{iA}^{(p-l)}=+\infty \tag{6.5.14}$$

证．与定理 6.3.3 的证明类似．

定理 6.5.4.

$$\overline{K}_{iA}^{*}=1-K_{iA}^{*} \quad (i\in E) \tag{6.5.15}$$

证．由 $\overline{K}_{iA}^{*}$ 与 K_{iA}^{*} 的定义立得本定理．

系 6.5.1. 设马氏链是不断的．若 A 是几乎闭集，则 $\{\overline{K}_{iA}^{*}, i\in E\}$ 是规格方程

$$x_i=\sum_{j\in\overline{A}} {}_{\overline{A}}f_{ij}^{*}x_j+(1-f_{i\overline{A}}^{*}) \quad (i\in E) \tag{6.5.16}$$

的最小非负解，其中 $\overline{A}=E\backslash A$.

系 6.5.2. 设马氏链是不断的．E 的子集 A 是几乎闭集的充要条件是规格方程

$$x_i=\sum_{j\in A} {}_{A}f_{ij}^{*}x_j+(1-f_{iA}^{*}) \quad (i\in E) \tag{6.5.17}$$

的最小非负解 $x_i^*(i\in E)$ 及规格方程

$$x_i=\sum_{j\in\overline{A}} {}_{\overline{A}}f_{ij}^{*}x_j+(1-f_{i\overline{A}}^{*}) \quad (i\in E) \tag{6.5.18}$$

的最小非负解 $\overline{x}_i^*(i\in E)$ 满足条件

$$x_i^*+\overline{x}_i^*=1 \quad (i\in E) \tag{6.5.19}$$

$$\sum_{i\in E}\overline{x}_i^*>0 \tag{6.5.20}$$

§6.6. 常返判别准则

熟知，状态 s 常返当且仅当 $f_{ss}^*=1$ 或 $p_{ss}^*=+\infty$ 或 $\overline{K}_{ss}^*=1$. 从原则来讲，利用 §6.2，§6.3 以及 §6.5 的结果可直接把 f_{ss}^* 或 p_{ss}^* 或 $\overline{K}_{ss}^*$ 计算出来，以判明 s 是否常返．但这不是总能办得到的．所以在下面介绍了几个常返判别准则，以供在不同情况下选择使用．

设马氏链是不断的，s 是 E 的一元，令 $D(s)=(i;\ s\rightsquigarrow i)\cup\{s\}$，$\underline{D}(s)=D(s)\backslash\{s\}$.

定理 6.6.1. (I) 若 s 是非本质状态,则 s 非常返;

(II) 若 s 是本质状态, $D(s)$ 是有限集,则 s 常返;

(III) 若 s 是本质状态, $D(s)$ 是可列集,则下列诸命题等价:

(i) s 是常返状态;

(ii) 规格方程

$$x_i = \sum_{k \in \underline{D}(s)} p_{ik} x_k + p_{is} \quad (i \in \underline{D}(s)) \tag{6.6.1}$$

的最小非负解 $x_i^* \equiv 1\ (i \in \underline{D}(s))$(而 $x_i^* \equiv 1\ (i \in \underline{D}(s))$ 可用定理 5.6.3 判定);

(iii) 方程

$$x_j \geqslant \sum_{k \in \underline{D}(s)} p_{kj} x_k + p_{sj} \quad (j \in \underline{D}(s)) \tag{6.6.2}$$

没有满足条件

$$\sum_{k \in \underline{D}(s)} p_{ks} x_k + p_{ss} < 1 \tag{6.6.3}$$

的非负解 $x_j (j \in \underline{D}(s))$;

(iv) 方程

$$x_i \geqslant \sum_{k \in D(s)} p_{ik} x_k + p_{is} \quad (i \in D(s)) \tag{6.6.4}$$

没有(有限)非负解;

(v) 方程

$$x_j \geqslant \sum_{k \in D(s)} p_{kj} x_k + p_{sj} \quad (j \in D(s)) \tag{6.6.5}$$

没有(有限)非负解.

证. (I) 和 (II) 显见,往证 (III).

由定理 6.3.2, 系 3.4.1 和系 5.6.1 易证 (i) 与 (ii) 等价; 由 $e_{ss} = f_{ss}^*$, 定理 6.2.5, 系 3.4.1 和系 3.3.2 知 (i) 与 (iii) 等价; 由定理 6.2.2 知 (i) 与 (iv) 等价; 由定理 6.2.4 知 (i) 与 (v) 等价. 于是定理得证.

设

$$x_i = \sum_{k\in E} c_{ik}x_k + b_i \quad (i\in E) \tag{6.6.6}$$

是规格方程及 $H\subset E$. 令

$$D^{(H)} = (k\colon \text{存在 } i\in H, \text{ 使 } i \underset{C}{\rightsquigarrow} k) \tag{6.6.7}$$

其中 $C=(c_{ik},\ i,\ k\in E)$. 构造马氏链 $\{y_n,\ n\geqslant 0\}$, 其相空间为 $\hat{E}=\{0\}\cup E$, 其转移概率矩阵 $\hat{P}=(\hat{p}_{ij},\ i,\ j\in E)$ 的元素如下唯一决定:

$$\hat{p}_{ij} = \begin{cases} r_j, & i=0,\ j\in\{0\}\cup D^{(H)} \\ 0, & i=0,\ j\in E\setminus D^{(H)} \\ c_{ij}, & i,\ j\in E \\ b_i, & i\in E,\ j=0 \end{cases} \tag{6.6.8}$$

其中

$$\sum_{j\in\{0\}\cup D^{(H)}} r_j = 1$$

且使 $0 \underset{y_n}{\rightsquigarrow} i$, 凡 $i\in H$. 这总能实现,例如,当 $H=(n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_N)$为有限集时,令 $r_{n_j}=1/N$, $(n_j\in H)$; 当 $H=(n_1,\ n_2,\ \cdots)$ 为可列集时,则令 $r_{n_j}=1/2^j(n_j\in H)$.

定义 6.6.1. 上面定义的马氏链 $\{y_n,\ n\geqslant 0\}$ 称为规格方程(6.6.6)的 H-伴随马氏链. 状态 O 称为 $\{y_n,\ n\geqslant 0\}$ 的添加状态. 当 $H=E$ 时,简称 $\{y_n,\ n\geqslant 0\}$ 为(6.6.6)的伴随马氏链.

定理 6.6.2. 若以 $x_i^*(i\in E)$ 表示(6.6.6)的最小非负解,并令

$$\hat{f}_{ij}^* = P(\text{存在 } n>0, \text{ 使 } y_n=j\mid x_0=i) \quad (i,\ j\in\hat{E}) \tag{6.6.9}$$

$$x_i^* = \hat{f}_{i0}^* \quad (i\in E) \tag{6.6.10}$$

证. 由(6.6.8),定理 6.3.2 以及系 3.4.1 立得本定理.

定理 6.6.3. 若以 $x_i^*(i\in E)$ 表示规格方程(6.6.6)的最小非负解,则 $x_i^*\equiv 1(i\in H)$ 的充分必要条件是(6.6.6)的 H-伴随马氏链的添加状态 0 是常返的.

证. 由定理 6.6.2, 定理 6.3.2, 系 3.4.1 及定理 5.6.2 易完成本定理的证明.

系 6.6.1 $x_i^* = 1$ $(i \in E)$ 的充要条件是(6.6.6)的伴随马氏链是不可约的常返链.

以 D 表示不断的马氏链的一切非常返状态集. 下面的定理 6.6.4 和系 6.6.2 是作为定理 6.6.3 和系 6.6.1 的应用实例而设.

定理 6.6.4. 若 $H \subset D$, 则自 H 中任一状态出发以概率 1 跑出 D 的充要条件是规格方程

$$x_i = \sum_{j \in D} p_{ij} x_j + p_{i\bar{D}} \quad (i \in D) \tag{6.6.11}$$

的某一 H-伴随马氏链的添加状态是常返的.

证. 注意由 D 的任一状态 i 出发终于跑出 D 的概率等于 $f_{i\bar{D}}^*$, 由定理 6.3.2, 定理 6.6.3 以及系 3.4.1 立得我们的定理.

系 6.6.2. 自 D 的任一状态出发以概率 1 跑出 D 的充分必要条件是规格方程(6.6.11)的伴随马氏链是不可约的常返链.

在我们今后的工作中, 有不少问题归结为判明一个规格方程的解是否等于 1 的问题. 定理 6.6.3 和系 6.6.1 的作用在于把这个问题归结为已经研究得较好的"常返性的判别"问题.

§ 6.7. 可加泛函的分布和矩

设马氏链是不断的, A 和 H_N 为 E 的子集, 且 $H_N = (N+1, N+2, \cdots)$. 令

$$\tau_A = \begin{cases} \inf(n: x_n \in A, n \geqslant 1), & \text{如括号中集非空} \\ +\infty, & \text{相反的情形} \end{cases} \tag{6.7.1}$$

$$\tau_A^{(n)} = \min(n, \tau_A) \quad (n \geqslant 1) \tag{6.7.2}$$

显见, τ_A, $\tau_A^{(n)}$ 都是不依赖于将来的随机变量.

设 $V(i)$ $(i \in E)$ 是 E 上的非负有穷值函数. 令

$$\xi_A^{(n)} = \sum_{k=1}^{\tau_A^{(n)}} V(x_{k-1}) \quad (n \geqslant 1) \tag{6.7.3}$$

$$\xi_A = \sum_{k=1}^{\tau_A} V(x_{k-1}) \tag{6.7.4}$$

易证，$\xi_A^{(n)}$ 和 ξ_A 是随机变量，且

$$\xi_A = \text{v-}\lim_{n\to\infty} \xi_A^{(n)} = \text{v-}\lim_{N\to\infty} \xi_{A\cup H_N} \tag{6.7.5}$$

令

$$F_{iA}^{(n)}(t) = P(\xi_A^{(n)} \leqslant t \mid x_0 = i) \tag{6.7.6}$$

$$F_{iA}(t) = P(\xi_A \leqslant t \mid x_0 = i) \tag{6.7.7}$$

$$\varphi_{iA}^{(n)}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF_{iA}^{(n)}(t) \quad (\lambda > 0) \tag{6.7.8}$$

$$\varphi_{iA}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF_{iA}(t) \quad (\lambda > 0) \tag{6.7.9}$$

$$\phi_{iA}^{(n)}(\lambda) = 1 - \varphi_{iA}^{(n)}(\lambda) \tag{6.7.10}$$

$$\phi_{iA}(\lambda) = 1 - \varphi_{iA}(\lambda) \tag{6.7.11}$$

$$T_{iA}^{(n,p)} = M\{[\xi_A^{(n)}]^p \mid x_0 = i\} \tag{6.7.12}$$

$$T_{iA}^{(p)} = M\{[\xi_A]^p \mid x_0 = i\} \tag{6.7.13}$$

这里 $p = 0, 1, \cdots$. 显然

$$T_{iA}^{(n,0)} = T_{iA}^{(0)} = 1 \tag{6.7.14}$$

由 (6.7.5) 和 (6.7.6) 知

$$\phi_{iA}(\lambda) = \text{v-}\lim_{n\to\infty} \phi_{iA}^{(n)}(\lambda) = \text{v-}\lim_{N\to\infty} \phi_{i,A\cup H_N}(\lambda) \tag{6.7.15}$$

$$T_{iA}^{(p)} = \text{v-}\lim_{n\to\infty} T_{iA}^{(n,p)} = \text{v-}\lim_{N\to\infty} T_{i,A\cup H_N}^{(p)} \tag{6.7.16}$$

有时把 $T_{iA}^{(1)}$ 记为 T_{iA}. 当 $A = \varnothing$ 时，上面各记号中的 A 可略去不写.

定理 6.7.1. $\phi_{iA}^{(n)}(\lambda)$ 由次之递推公式唯一决定：

$$\left.\begin{aligned} &\phi_{iA}^{(1)}(\lambda) = 1 - e^{-\lambda V(i)} \quad (i \in E) \\ &\phi_{iA}^{(n+1)}(\lambda) = \sum_{j \notin A} p_{ij} e^{-\lambda V(i)} \phi_{jA}^{(n)}(\lambda) + (1 - e^{-\lambda V(i)}) \\ &\qquad\qquad (n \geqslant 1,\ i \in E) \end{aligned}\right\} \tag{6.7.17}$$

证. (6.7.17)的第一式显见成立，往证第二式. 由马氏性易证

$$F_{iA}^{(n+1)}(t)=\sum_{j\notin A}p_{ij}F_{jA}^{(n)}(t-V(i))+\sum_{j\in A}p_{ij}P(V(i)$$

$$\leqslant t|x_0=i)\quad(n\geqslant 1,\ i\in E)\tag{6.7.18}$$

于是有

$$\varphi_{iA}^{(n+1)}(\lambda)=\sum_{j\notin A}p_{ij}e^{-\lambda V(i)}\varphi_{jA}^{(n)}(\lambda)+\sum_{j\in A}p_{ij}e^{-\lambda V(i)}$$

$$(n\geqslant 1,\ i\in E)\tag{6.7.19}$$

由 (6.7.19) 和 (6.7.10) 立得 (6.7.17) 的第二式．定理证毕．

定理 6.7.2. $T_{iA}^{(n,p)}$ 由次之递推公式唯一决定:

$$\left.\begin{aligned}&T_{iA}^{(1,p)}=V(i)^p\quad(i\in E)\\&T_{iA}^{(n+1,p)}=\sum_{l=0}^{p}C_p^lV(i)^l\sum_{j\notin A}p_{ij}T_{jA}^{(n,p-l)}\\&\qquad+\sum_{j\in A}p_{ij}V(i)^p\quad(n\geqslant 1,\ i\in E)\end{aligned}\right\}\tag{6.7.20}$$

证．由马氏性易完成本定理的证明．

定理 6.7.3. $\{\phi_{iA}(\lambda),\ i\in E\}$ 是拟规格方程

$$x_i=\sum_{j\notin A}p_{ij}e^{-\lambda V(i)}x_j+(1-e^{-\lambda V(i)})\quad(i\in E)\tag{6.7.21}$$

的最小非负解．

证．由(6.7.15)，定理 6.7.1 以及定理 3.2.1 立得我们的定理．

当 $V(i)T_{iA}^{(p-1)}=+\infty$ 时，我们约定

$$\sum_{l=1}^{p}C_p^l(-1)^{l-1}V(i)^lT_{iA}^{(p-l)}=+\infty\tag{6.7.22}$$

定理 6.7.4. 对于 $p\geqslant 1$，$\{T_{iA}^{(p)},\ i\in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$x_i=\sum_{j\notin A}p_{ij}x_j+\sum_{l=1}^{p}C_p^l(-1)^{l-1}V(i)^lT_{iA}^{(p-l)}\quad(i\in E)\tag{6.7.23}$$

的最小非负解．

证．由 (6.7.16)，定理 6.7.2 以及定理 3.2.2，并参考定理 6.3.3 的证明易完成我们的定理的证明．

定理 6.7.5. 设 $G \subset E$，则

$$T_{iA}^{(p)} < +\infty, \quad (i \in G) \tag{6.7.24}$$

的充要条件是(6.7.23)的优方程

$$x_i \geqslant \sum_{j \notin A} p_{ij} x_j + \sum_{l=1}^{p} C_p^l (-1)^{l-1} V(i)^l T_{iA}^{(p-l)} \quad (i \in E) \tag{6.7.25}$$

有如下性质的非负解 $x_i (i \in E)$:

$$x_i < +\infty \quad (i \in G) \tag{6.7.26}$$

证. 由定理 6.7.4 及系 3.3.1 立得我们的定理.

定理 6.7.6. 若对某个常数 $0 < c < +\infty$ 有

$$T_{iA} \leqslant c \quad (i \in E) \tag{6.7.27}$$

则

$$T_{iA}^{(p)} \leqslant p! c^p \quad (i \in E) \tag{6.7.28}$$

证. 与定理 6.3.4 的证明类似.

系 6.7.1. 设(6.7.27)成立，则 $\varphi_{iA}(\lambda)$ 在 $|\lambda| < 1/c$ 中解析，且

$$\varphi_{iA}(\lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{T_{iA}^{(p)}}{p!} \lambda^p \quad (|\lambda| < 1/c, \ i \in E) \tag{6.7.29}$$

定理 6.7.7. 设 $G \subset E$，则

$$F_i(+\infty) = 0 \quad (i \in G) \tag{6.7.30}$$

即

$$\phi_i(\lambda) \equiv 1 \quad (\lambda > 0, \ i \in G) \tag{6.7.31}$$

的充要条件是对某一 $\lambda > 0$，规格方程

$$x_i = \sum_{j \in E} p_{ij} e^{-\lambda V(i)} x_j + (1 - e^{-\lambda V(i)}) \quad (i \in E) \tag{6.7.32}$$

的某一 G-伴随马氏链的添加状态是常返的.

证. 由定理 6.7.3 和定理 6.6.3 立得我们的定理.

§6.8. 导出马氏链和原子几乎闭集的判别准则

本节从一个已给的马氏链出发在不变集上构造一个新的马氏链(叫做导出链)，这样一来，凡是关于马氏链的结果都可移植到不

变集上．进而，作为例子，把 [I, II, 定理 17.5 的推论] 的结果加以移植，得到了原子几乎闭集的判别准则．最后给出这个准则在自由徘徊上的应用．

设 Λ 为马氏链 X 的一个不变集，且

$$P(\Lambda) \neq 0 \tag{6.8.1}$$

Λ 是不变集乃指

$$\Lambda \in \mathscr{F}\{x_n, n < \zeta + 1\},\ \Lambda \cap (\zeta + 1 > m) = \theta_m \Lambda \tag{6.8.2}$$

其中 θ_m 是 Е. Б. Динкин 在 [6] 中定义的推移算子．

定理 6.8.1. $\hat{X} = \{x_n(\omega),\ n < \zeta + 1,\ \omega \in \Lambda\}$ 是概率空间 $(\Omega\Lambda, \mathscr{F}\Lambda, P(\cdot|\Lambda))$ 上的齐次可列马氏链，其状态空间为

$$\hat{E} = (i:\ P_i(\Lambda) \neq 0) \tag{6.8.3}$$

其转移概率为

$$\hat{p}_{ij} = p_{ij}\frac{P_j(\Lambda)}{P_i(\Lambda)} \quad (i,\ j \in \hat{E}) \tag{6.8.4}$$

这里

$$P_i(\cdot) = P(\cdot | x_0 = i) \tag{6.8.5}$$

若 X 是不断的，则 $\hat{X}$ 也是不断的．

证．设 m, l, k 为正整数，$j_l > j_{l-1} > \cdots > j_1 (m > j_l)$ 为非负整数，$i_{m+k}, i_m, i_{j_e}, i_{j_{e-1}}, \cdots i_{j_1} \in \hat{E}$ 以及

$$p(x_m = i_m, x_{j_e} = i_{j_e}, x_{j_{e-1}} = i_{j_{e-1}}, \cdots x_{j_1} = i_{j_1}, \Lambda) \neq 0 \tag{6.8.6}$$

于是由 (6.8.2)，马氏性以及

$$(x_m = i_m) = (\zeta + 1 > m,\ x_m = i_m) \tag{6.8.7}$$

得

$$\begin{aligned}
&P(x_{m+k} = i_{m+k} | x_m = i_m, x_{j_e} = i_{j_e}, x_{j_{e-1}} = i_{j_{e-1}}, \cdots, x_{j_1} \\
&= i_{j_1}, \Lambda) = P(x_{m+k} = i_{m+k} | x_m = i_m, x_{j_e} = i_{j_e}, x_{j_{e-1}} \\
&= i_{j_{e-1}}, \cdots, x_{j_1} = i_{j_1}, \Lambda, \zeta + 1 > m) = [P(x_{m+k} \\
&= i_{m+k}, \Lambda, \zeta + 1 > m | x_m = i_m, x_{j_e} = i_{j_e}, x_{j_{e-1}} \\
&= i_{j_{e-1}}, \cdots, x_{j_1} = i_{j_1})]/[P(\Lambda, \zeta + 1 > m | x_m = i_m, x_{j_e} \\
&= i_{j_e}, x_{j_{e-1}} = i_{j_{e-1}}, \cdots x_{j_1} = i_{j_1})] = [P(x_{m+k} \\
&= i_{m+k}, \theta_m \Lambda | x_m = i_m, x_{j_e} = i_{j_e}, x_{j_{e-1}} = i_{j_{e-1}}, \cdots, x_{j_1}
\end{aligned}$$

$= i_{j_1})]/[P(\theta_m\Lambda|x_m = i_m, x_{j_e} = i_{j_e}, x_{j_{e-1}} = i_{j_{e-1}}, \cdots, x_{j_1}$
$= i_{j_1})] = [P(x_k = i_{m+k}, \Lambda|x_0 = i_m)]/[P(\Lambda|x_0 = i_m)]$
$$= P(x_k = i_{m+k}|x_0 = i_m, \Lambda) \tag{6.8.8}$$

对 $i, j \in \hat{E}$，有

$$\hat{p}_{ij} = P(x_1 = j|x_0 = i, \Lambda) = \frac{P(x_1 = j, \Lambda|x_0 = i)}{P(\Lambda|x_0 = i)}$$
$$= \frac{P(x_1 = j|x_0 = i)P(\Lambda|x_0 = i, x_1 = j)}{P_i(\Lambda)}$$
$$= p_{ij}\frac{P(\theta_1\Lambda|x_0 = i, x_1 = j)}{P_i(\Lambda)}$$
$$= p_{ij}\frac{P(\Lambda|x_0 = j)}{P_i(\Lambda)} = p_{ij}\frac{P_j(\Lambda)}{P_i(\Lambda)} \tag{6.8.9}$$

对 $i \in E\backslash\hat{E}$，有

$$P(x_m = i|\Lambda) = \frac{P(\Lambda, x_m = i)}{P(\Lambda)} = \frac{P(\theta_m\Lambda, x_m = i)}{P(\Lambda)}$$
$$= \frac{P(x_m = i)P(\theta_m\Lambda|x_m = i)}{P(\Lambda)} = \frac{P(x_m = i)P(\Lambda|x_0 = i)}{P(\Lambda)}$$
$$= \frac{P(x_m = i)}{P(\Lambda)} \cdot P_i(\Lambda) = 0 \tag{6.8.10}$$
$$p(\zeta < +\infty|\Lambda) \leqslant \frac{P(\rho < +\infty)}{P(\Lambda)} \tag{6.8.11}$$

由 (6.8.8)—(6.8.11) 立得我们的定理.

定义 6.8.1. $\hat{X}$ 叫做马氏链 X 的在 Λ 上的导出马氏链.

定理 6.8.2. 设 C 是不断马氏链 X 的几乎闭集，且

$$\mathscr{L}(C) \doteq \Lambda \tag{6.8.12}$$

则 C 是 X 的原子几乎闭集(完全非原子几乎闭集)的充要条件是 $\hat{E}$ 是 X 的在 Λ 上的导出马氏链 $\hat{X}$ 的原子几乎闭集（完全非原子几乎闭集）. 关于记号 $\mathscr{L}(C)$ 的意义见 [1, I, § 17].

首先证明几个引理.

引理 6.8.1. 令

$$A = (i: P_i(\Lambda) > a) \tag{6.8.13}$$

其中 $0 < a < 1$ 是个常数．试证 $C\Delta A$ 是 X 的一个不可回集．从而，C 是 X 的原子几乎闭集(完全非原子几乎闭集)的充要条件是 A 是它的原子几乎闭集(完全非原子几乎闭集)．

证．由 [1, I, 定理 17.1 的推论] 知

$$\mathscr{L}(A) \doteq \Lambda \tag{6.8.14}$$

由 (6.8.12) 和 (6.8.14) 立得本引理．

引理 6.8.2. A 的任一子集 A^0 是 X 的几乎闭集的充要条件是 A^0 是 $\hat{X}$ 的几乎闭集．从而知，A 是 X 的原子几乎闭集(完全非原子几乎闭集)的充要条件是 A 是 $\hat{X}$ 的原子几乎闭集(完全非原子几乎闭集)．

证．由 $A^0 \subseteq A$ 及 (6.8.14) 知

$$P(\overline{\mathscr{L}}(A^0) \cap \bar{\Lambda}) \leqslant P(\mathscr{L}(A) \cap \bar{\Lambda}) = 0 \tag{6.8.15}$$

$$P(\underline{\mathscr{L}}(A^0) \cap \bar{\Lambda}) \leqslant P(\mathscr{L}(A \cap \bar{\Lambda}) = 0 \tag{6.8.16}$$

其中 $\bar{\Lambda} = \Omega \backslash \Lambda$．于是

$$P(\overline{\mathscr{L}}(A^0) | \Lambda) = \frac{P(\overline{\mathscr{L}}(A^0) \cap \Lambda)}{P(\Lambda)}$$

$$= \frac{P(\overline{\mathscr{L}}(A^0)) - P(\overline{\mathscr{L}}(A^0) \cap \bar{\Lambda})}{P(\Lambda)} = \frac{P(\overline{\mathscr{L}}(A^0))}{P(\Lambda)} \tag{6.8.17}$$

及

$$P(\underline{\mathscr{L}}(A^0) | \Lambda) = \frac{P(\underline{\mathscr{L}}(A^0))}{P(\Lambda)} \tag{6.8.18}$$

从而

$$P(\overline{\mathscr{L}}(A^0)) = P(\underline{\mathscr{L}}(A^0)) \tag{6.8.19}$$

和

$$P(\overline{\mathscr{L}}(A^0)) > 0 \tag{6.8.20}$$

同时成立的充要条件是

$$P(\overline{\mathscr{L}}(A^0) | \Lambda) = P(\underline{\mathscr{L}}(A^0) | \Lambda) \tag{6.8.21}$$

和

$$P(\overline{\mathscr{L}}(A^0)) > 0 \tag{6.8.22}$$

同时成立．于是引理得证．

引理 6.8.3. 令

$$B=(i:\ 0<P_i(A)\leqslant a) \tag{6.8.23}$$

则

$$A\cap B=\emptyset,\ A\cup B=\hat{E} \tag{6.8.24}$$

$$P(\overline{\mathscr{L}}(B)|A)=0 \tag{6.8.25}$$

从而知，A 是 $\hat{X}$ 的原子几乎闭集(完全非原子几乎闭集)的充要条件是 $\hat{E}$ 是它的原子几乎闭集(完全非原子几乎闭集).

证. 由 (6.8.13), (6.8.23) 和 $\hat{E}$ 的定义立得 (6.8.24). 由 (6.8.14) 和 (6.8.24) 得

$$\begin{aligned} P(\overline{\mathscr{L}}(B)|A) &= P(x_n\in B\ \text{无穷次}\ |A) \\ &= P(x_n\notin A\ \text{无穷次}\ |A)=0 \end{aligned} \tag{6.8.26}$$

于是引理得证.

定理的证明. 综合以上三个引理立得我们的定理.

定理 6.8.3. E 的几乎闭集 A 是原子几乎闭集的充要条件是方程

$$x_i=\sum_{j\in\hat{E}}p_{ij}\frac{P_j(\mathscr{L}(A))}{P_i(\mathscr{L}(A))}x_j\quad (i\in\hat{E}) \tag{6.8.27}$$

没有非常数的有界解. 其中

$$\hat{E}=(i:\ P_i(\mathscr{L}(A)>0)) \tag{6.8.28}$$

证. 由定理 6.8.1, 定理 6.8.2 和 [1, I, 定理 17.5 的推论]立得我们的定理.

设马氏链 X 的状态空间 E 为一切整数所构成的集，转移概率

$$p_{ij}=\begin{cases} a_i, & j=i-1 \\ b_i, & j=i+1 \\ 0 & |j-i|>1 \end{cases} \tag{6.8.29}$$

而

$$a_i>0,\ b_i>0,\ a_i+b_i=1\quad (i\in E) \tag{6.8.30}$$

这种马氏链又称为自由徘徊.

令

$$A_a=\begin{cases} (\cdots, n-2, n-1), \text{如}\ a=1 \\ (n, n+1, \cdots), \text{如}\ a=2 \end{cases} \tag{6.8.31}$$

$$
\left.\begin{array}{l}
x_i = -b_0\left(1+\dfrac{b_{-1}}{a_{-1}}+\cdots+\dfrac{b_{-1}b_{-2}\cdots b_{i+1}}{a_{-1}a_{-2}\cdots a_{i+1}}\right), \text{如} i<-1 \\
x_{-1}=-b_0,\ x_0=0,\ x_1=a_0, \\
x_i = a_0\left(1+\dfrac{a_1}{b_1}+\cdots+\dfrac{a_1a_2\cdots a_{i-1}}{b_1b_2\cdots b_{i-1}}\right), \text{如} i>1 \\
r_1=\lim\limits_{i\to-\infty} x_i,\ r_2=\lim\limits_{i\to+\infty} x_i
\end{array}\right\} \quad (6.8.32)
$$

[11, 定理 5.1] 给出了 E 的 Blackweel 分解. 我们现在利用定理 6.8.3 所提供的方法重新给出这一结果.

定理 6.8.4. (A) 若 r_1, r_2 至少有一个无穷,则 E 是原子几乎闭集.

(B) 若 r_1, r_2 均有穷, 则 E 可分为两个互不相交的原子几乎闭集 A_1 与 A_2 之和:

$$
E = A_1 + A_2 \tag{6.8.33}
$$

证. 对于结论 (A) 的证明我们的方法与 [11, 定理 5.1] 的证明一样,故从略. 往证结论 (B). 为此,首先证明

引理 6.8.4. 设

$$
s_i > 0\ (i=1,2,\cdots),\quad \sum_{i=1}^{\infty} s_i < +\infty
$$

若令

$$
\bar{s}_i = \sum_{k=i}^{\infty} s_k \quad (i=1,2,\cdots) \tag{6.8.34}
$$

则

$$
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{\bar{s}_i\bar{s}_{i+1}} = +\infty \tag{6.8.35}
$$

证. 由于 $\dfrac{1}{\bar{s}_{i+1}} \uparrow +\infty\ (i\uparrow+\infty)$, 故只需证

$$
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{\bar{s}_i} = +\infty \tag{6.8.36}
$$

因对任一 n 有

$$
\sum_{i=n}^{\infty} \frac{s_i}{\bar{s}_i} \geqslant \sum_{i=n}^{\infty} \frac{s_i}{\bar{s}_n} = \frac{1}{\bar{s}_n}\sum_{i=n}^{\infty} s_i = 1 \tag{6.8.37}
$$

所以(6.8.36)成立．引理得证．

现在转向结论(B)的证明．设 r_1, r_2 均有穷，由[11，§5]知，这时 A_1 是几乎闭集，且

$$P(\mathscr{L}(A_1)) = \frac{r_2 - x_i}{r_2 - r_1} \quad (i \in E) \tag{6.8.38}$$

由(6.8.38)和定理 6.8.3 知，欲使 A_1 是原子几乎闭集，只需证明方程

$$u_i = a_i \frac{r_2 - x_{i-1}}{r_2 - x_i} u_{i-1} + b_i \frac{r_2 - x_{i+1}}{r_2 - x_i} u_{i+1} \quad (i \in E) \tag{6.8.39}$$

没有非常数的有界解．由(6.8.39)得

$$\begin{aligned} u_{i+1} - u_i &= \frac{a_i(r_2 - x_{i-1})}{b_i(r_2 - x_{i+1})}(u_i - u_{i-1}) \\ &= (r_2 - x_1)(r_2 - x_0) \frac{a_1 a_2 \cdots a_i}{b_1 b_2 \cdots b_i} \frac{1}{(r_2 - x_{i+1})(r_2 - x_i)} \\ &\quad \times (u_1 - u_0) \quad (i > 0) \end{aligned} \tag{6.8.40}$$

于是

$$\begin{aligned} u_{i+1} - u_0 = \frac{(r_2 - x_1)(r_2 - x_0)}{a_0} \Bigg(&\frac{a_0}{(r_2 - x_1)(r_2 - x_0)} \\ &+ a_0 \sum_{k=1}^{i} \frac{a_1 a_2 \cdots a_k}{b_1 b_2 \cdots b_k} \frac{1}{(r_2 - x_{k+1})(r_2 - x_k)} \Bigg) \\ \times (u_1 - u_0) \qquad & (i > 0) \end{aligned} \tag{6.8.41}$$

由 $r_2 < +\infty$ 及引理 6.8.4 知

$$\frac{a_0}{(r_2 - x_1)(r_2 - x_0)} + a_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_k}{b_1 b_2 \cdots b_k} \frac{1}{(r_2 - x_{k+1})(r_2 - x_k)} = +\infty \tag{6.8.42}$$

于是若 $u_i (i \in E)$ 是(6.8.39)的有界解，由(6.8.41)得 $u_1 - u_0 = 0$，从而 $u_i \equiv$ 常数．于是知 A_1 是原子几乎闭集．同理可证，A_2 是原子几乎闭集．

第七章 Martin 流出边界理论

§7.1. 引 言

马氏链的 Martin 流出边界理论为 Doob[12] 所首创，为 Hunt[13] 所发展. 继他们之后有一系列工作出现，但在这些工作中都在马氏链上加了一定的限制，如在 [13] 中假定所研究的马氏链的一切状态都是非常返的，在 [14] 中则假定至少有一个状态可到达其他一切状态. 因此，他们并未对一般马氏链建立起 Martin 流出边界理论，而且对流出边界理论中所涉及的几个课题的研究尚欠深入. 如，都是只给出原子流出点和非原子流出点的定义，而未给出它们的行之有效的判别准则. 本章的目的是:

(i) 建立一般马氏链的 Martin 流出边界理论.

(ii) 给出过份函数，势函数，最小过份函数，最小势函数，最小调和函数，原子流出点，非原子流出点，原子流出空间的存在以及非原子流出空间的存在的判别准则.

(iii) 给出原子几乎闭集，完全非原子几乎闭集及状态空间的 Blackweel 分解的判别准则.

Hunt 的论文 [13] 无疑是马尔可夫过程的边界理论中少数经典著作之一. 但相当难读. 为此，Дынкин 在 [15] 中对 Hunt 的工作进行了整理，论证清楚严谨. 因此在本章中凡是与 [15] 的相应之处的论证十分类似的地方都有意写得十分简约，以免文字冗长.

§7.2. 马氏链的分解

设 $X(\omega)=\{x_n(\omega),\ 0\leqslant n<\zeta(\omega)+1,\ \omega\in\Omega\}$ 是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的马氏链，$E=(0,1,2,\cdots)$ 为其状态空间，$P=(p_{ij},\ i,\ j\in E)$ 为其转移概率矩阵. 周知，E 能分解成

如下形式：

$$E = E_0 \cup \bigcup_{a \in \mathscr{A}} E_a \tag{7.2.1}$$

其中 $\mathscr{A}$ 为空集、有限集或可列集，且 $0 \bar{\in} \mathscr{A}$. E_0 为一切非常返状态构成的集，因此可以是空的. $E_a(a \in \mathscr{A})$ 为不可约的常返集. 于是

$$E_a \cap E_{a'} = \varnothing \quad (a \neq a', a, a' \in \{0\} \cup \mathscr{A}) \tag{7.2.2}$$

令

$$E^{\mathscr{A}} = \bigcup_{a \in \mathscr{A}} E_a \tag{7.2.3}$$

即 $E^{\mathscr{A}}$ 是一切常返状态构成的集.

定义 7.2.1. 若 $E^{\mathscr{A}} = \varnothing$，则 $X(\omega)$ 称为瞬时链. 若对一切 $\omega \in \Omega$，存在 $N \geqslant 0$，使得

$$x_n(\omega) \in E^{\mathscr{A}}, \ N \leqslant n < \zeta(\omega) + 1 \tag{7.2.4}$$

则称 $X(\omega)$ 为拟常返链. 若 $E^{\mathscr{A}}$ 还是一个不可约集，则称 $X(\omega)$ 为拟不可约常返链.

引理 7.2.1. 若 Λ 为不变集，则

$$P_i(\Lambda) \geqslant \sum_{j \in E} p_{ij} P_j(\Lambda) \quad (i \in E) \tag{7.2.5}$$

证.

$$\begin{aligned} P_i(\Lambda) &\geqslant \sum_{j \in E} P_i(x_1 = j, \zeta(\omega) + 1 > 1, \Lambda) \\ &= \sum_{j \in E} P_i(x_1 = j, \theta_1 \Lambda) = \sum_{j \in E} P_i(x_1 = j) P_i(\theta_1 \Lambda | x_1 = j) \\ &= \sum_{j \in E} P_{ij} P_j(\Lambda) \end{aligned} \tag{7.2.6}$$

得所欲证.

令

$$\Lambda_0 = (\omega: \ x_n \in E_0, \ 凡 \ 0 \leqslant n < \zeta(\omega) + 1) \tag{7.2.7}$$

$$\Lambda_a = (\omega: \ 存在 \ N \geqslant 0, \ 当 \ N \leqslant n < \zeta(\omega) + 1 \ 时 \ 有 \ x_n \in E_a) \quad (a \in \mathscr{A}) \tag{7.2.8}$$

引理 7.2.2. 对于任意固定的 $a\in\mathscr{A}$，Λ_a 为不变集，且 $P_i(\Lambda_a)$ $(i\in E)$ 如下唯一决定：

$$P_i(\Lambda_a)=1 \quad (i\in E_a) \tag{7.2.9}$$

$$P_i(\Lambda_a)=0 \quad (i\in E^{\mathscr{A}}\setminus E_a) \tag{7.2.10}$$

以及 $P_i(\Lambda_a)$ $(i\in E_0)$ 是拟规格方程

$$x_i=\sum_{j\in E_0}p_{ij}x_j+\sum_{j\in E_a}p_{ij} \quad (i\in E_0) \tag{7.2.11}$$

的最小非负解.

证．Λ_a 显然是不变集，(7.2.9) 和 (7.2.10) 是平凡的.

令

$$f_{iE_a}^{(n)}=P_i(x_\nu\notin E_a,\ 0<\nu<n,\ x_n\in E_a) \quad (i\in E_0) \tag{7.2.12}$$

显见有

$$\left.\begin{aligned} f_{iE_a}^{(1)}&=\sum_{j\in E_a}p_{ij} \quad (i\in E_0)\\ f_{iE_a}^{(n+1)}&=\sum_{k\in E_0}p_{ik}f_{kE_a}^{(n)} \quad (n\geqslant 1)\end{aligned}\right\} \tag{7.2.13}$$

$$P_i(\Lambda_a)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{iE_a}^{(n)} \quad (i\in E_0) \tag{7.2.14}$$

由(7.2.13)、(7.2.14)以及系 3.2.3 立得，$P_i(\Lambda_a)$ $(i\in E_0)$ 是(7.2.11)的最小非负解．于是引理得证.

引理 7.2.3. Λ_0为不变集，且

$$P_i(\Lambda_0)=\begin{cases}1-\sum_{a\in\mathscr{A}}P_i(\Lambda_a) & (i\in E_0)\\ 0 & (i\in E^{\mathscr{A}})\end{cases} \tag{7.2.15}$$

证．本引理显见成立，故证明从略.

定理 7.2.1. （马氏链的分解定理）

(i) $\Lambda_a\cap\Lambda_{a'}=\varnothing \quad (a\neq a',\ a,a'\in\{0\}\cup\mathscr{A})$ (7.2.16)

$$P(\Omega\setminus\bigcup_{a\in\{0\}\cup\mathscr{A}}\Lambda_a)=0 \tag{7.2.17}$$

(ii) 若 $P(\Lambda_0)>0$，则

$$X^0(\omega) = \{x_n(\omega),\ 0 \leqslant n < \zeta(\omega) + 1,\ \omega \in \Lambda_0\}$$

是概率空间 $(\Omega\Lambda_0,\ \mathscr{F}\Lambda_0,\ P(\cdot|\Lambda_0))$ 上的瞬时链，状态空间

$$E_0^+ = (i:\ P_i(\Lambda_0) > 0) \subset E_0 \tag{7.2.18}$$

其转移概率

$$\mathring{P}_{ij} = p_{ij}\frac{P_j(\Lambda_0)}{P_i(\Lambda_0)} \quad (i,\ j \in E_0^+) \tag{7.2.19}$$

(iii) 若 $\mathscr{A} \neq \emptyset$, $a \in \mathscr{A}$，则

$$X^a = \{x_n(\omega),\ 0 \leqslant n < \zeta(\omega) + 1,\ \omega \in \Lambda_a\}$$

是概率空间 $(\Omega\Lambda_a,\ \mathscr{F}\Lambda_a,\ P(\cdot|\Lambda_a))$ 上的拟不可约常返链，其状态空间

$$E_a^+ = (i:\ P_i(\Lambda_a) > 0) \supset E_a \tag{7.2.20}$$

其转移概率

$$\overset{a}{p}_{ij} = p_{ij}\frac{P_j(\Lambda_a)}{P_i(\Lambda_a)} \quad (i,\ j \in E_a^+) \tag{7.2.21}$$

证. 由 $\Lambda_a(a \in \{0\} \cup \mathscr{A})$ 是不变集及定理 6.8.1 易完成本定理的证明.

§7.3. 关于过份函数的终极性态

定义 7.3.1. 非负函数(允许取值$+\infty$) $f_i\ (i \in E)$ 叫做关于 P 的过份函数(或简称为过份函数)，如果

$$f_i \geqslant \sum_{j \in E} p_{ij} f_j \quad (i \in E) \tag{7.3.1}$$

叫做调和函数，如果 (7.3.1) 中的等号恒成立.

令

$$\Omega_\infty = (\omega:\ \zeta(\omega) = +\infty) \tag{7.3.2}$$

即 Ω_∞ 是一切非中断的样本.

定理 7.3.1. 设 $f_i(i \in E)$ 是过份函数，如果 $f_s < +\infty$，那末在 Ω_∞ 上 P_s-几乎存在有限的极限

$$\lim_{n \to \infty} f_{x_n(\omega)} \tag{7.3.3}$$

如果 $f_s = +\infty$，那末在 Ω_∞ 上 P_s-几乎仅有两种可能：或者对一

切 n 有 $f_{x_n(\omega)}=+\infty$，或者 $f_{x_n(\omega)}$ 趋于有限的极限.

证. 虽然在 [15] 中研究的是瞬时链，但是 [15，§5] 中的论证却带有普遍的意义. 因此，逐字重复该节的叙述，就得到我们的定理.

§7.4. Green 函数和 Martin 核

令

$$f_{ij}^{(n)}=P_i(x_\nu\neq j,\ 0\leqslant\nu<n,\ x_n=j) \tag{7.4.1}$$

$$f_{ij}^{*}=P_i(\text{存在 } n\geqslant 0,\text{ 使 } x_n=j) \tag{7.4.2}$$

$$F^{*}=(f_{ij}^{*},\ i,\ j\in E) \tag{7.4.3}$$

显然有

$$f_{ij}^{*}=\sum_{n=0}^{\infty}f_{ij}^{(n)} \tag{7.4.4}$$

定理 7.4.1. 对于固定的 j，$f_{ij}^{*}(i\in E)$ 如下唯一决定:

(i) $f_{jj}^{*}=1$

(ii) $f_{ij}^{*}(i\neq j)$ 是拟规格方程 (7.4.5)

$$x_i=\sum_{k\neq j}p_{ik}x_k+p_{ij}\quad(i\neq j) \tag{7.4.6}$$

的最小非负解.

证. 由(7.4.1)知，$f_{jj}^{(0)}=1$，$f_{jj}^{(n)}=0(n\geqslant 1)$. 于是，由(7.4.4)立得 (7.4.5); 由 (7.4.1) 知

$$f_{ij}^{(0)}=0\quad(i\neq j) \tag{7.4.7}$$

于是，由 (7.4.4) 得

$$f_{ij}^{*}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}\ (i\neq j) \tag{7.4.8}$$

由马氏性和 (7.4.1) 得

$$\left.\begin{aligned}&f_{ij}^{(1)}=p_{ij}\quad(i\neq j)\\&f_{ij}^{(n+1)}=\sum_{k\neq j}p_{ik}f_{kj}^{(n)}\quad(n\geqslant 1,\ i\neq j)\end{aligned}\right\} \tag{7.4.9}$$

于是，由 (7.4.8) 和 (7.4.9) 以及定理 3.2.3，立得 (ii). 定理证毕.

定理 7.4.2. 对于固定的 j, $f_{ij}^*(i\in E)$ 是过份函数.

证. 由

$$0\leqslant f_{ij}^*\leqslant 1 \quad (i\in E) \tag{7.4.10}$$

及定理 7.4.1.知

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k\in E} p_{ik}f_{kj}^*\leqslant \sum_{k\in E} p_{ik}\leqslant 1=f_{jj}^*\\
&\sum_{k\in E} p_{ik}f_{kj}^*=\sum_{k\neq j} p_{ik}f_{kj}^*+p_{ij}f_{jj}^*\\
&\qquad=\sum_{k\neq j} p_{ik}f_{kj}^*+p_{ij}=f_{ij}^* \quad (i\neq j)
\end{aligned}\right\} \tag{7.4.11}$$

于是 $f_{ij}^*(i\in E)$ 是过份函数.

定理 7.4.3. 设 $f_i\geqslant 0$ $(i\in E)$, 令

$$f=\begin{pmatrix} f_0\\ f_1\\ \vdots \end{pmatrix} \tag{7.4.12}$$

则 F^*f 是过份函数.

证. 注意定理 7.4.2 和

$$F^*f=\sum_{k\in E} f_k\begin{pmatrix} f_{0k}^*\\ f_{1k}^*\\ \vdots \end{pmatrix} \tag{7.4.13}$$

立得我们的定理.

定义 7.4.1. f_{ij}^* $(i, j\in E)$ 叫做关于 P 的 Green 函数,或简称为 Green 函数.

定理 7.4.4. 设 $p_{ij}^{(n)}$ 是 P^n 的元素,若令

$$g_{ij}=\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \quad (i, j\in E) \tag{7.4.14}$$

则

$$g_{ij}=f_{ij}^*g_{jj} \quad (i, j\in E) \tag{7.4.15}$$

若 j 为非常返状态,则

$$g_{ij}=f_{ij}^*g_{jj}<+\infty \quad (i, j\in E) \tag{7.4.16}$$

这里约定 $0\cdot\infty=0$.

证. 由 [1, I, 定理 5.2] 立得我们的定理.

定义 7.4.2. 满足下列条件的 E 上的测度 γ 叫做关于 P 的标准测度:

(i) γ 为有限的,即

$$\sum_{i\in E}\gamma_i<+\infty \tag{7.4.17}$$

(ii)

$$n_j=\sum_{i\in E}\gamma_i f_{ij}^*>0 \quad (j\in E) \tag{7.4.18}$$

关于 P 的标准测度下面简称为标准测度.

定理 7.4.5. 标准测度总存在. 若 γ 为标准测度,则

$$0<n_j<+\infty \quad (j\in E) \tag{7.4.19}$$

证. 如 $\gamma_i=2^{-(i+1)}(i\in E)$ 就是一个标准测度,所以标准测度总存在;若 γ 为标准测度,则

$$0<n_j=\sum_{i\in E}\gamma_i f_{ij}^*\leqslant\sum_{i\in E}\gamma_i<+\infty \quad (j\in E) \tag{7.4.20}$$

于是(7.4.19)成立. 定理证毕.

下面总认为 γ 表示一标准测度. 我们说一个非负函数 $f_i(i\in E)$ 是 γ 可积的,如果

$$\sum_{i\in E}f_i\gamma_i<+\infty$$

定义 7.4.3.

$$K(i,j)=\frac{f_{ij}^*}{n_j} \quad (i,j\in E) \tag{7.4.21}$$

叫做关于 P 的 Martin 核,或简称为 Martin 核.

§ 7.5. *h*-链

定义 7.5.1. 定义在 $E\times E$ 上的函数 $a_{ij}(i,j\in E)$ 叫做 E 上的转移函数,如果

$$a_{ij} \geqslant 0 \quad (i, j \in E) \tag{7.5.1}$$

$$\sum_{j \in E} a_{ij} \leqslant 1 \quad (i \in E) \tag{7.5.2}$$

若 $a_{ij}(i, j \in E)$ 是 E 上的转移函数，则 $A = (a_{ij}, i, j \in E)$ 叫做 E 上的转移矩阵.

按定义，马氏链的转移概率 $p_{ij}(i, j \in E)$ 是 E 上的转移函数，而 $P = (p_{ij}, i, j \in E)$ 是 E 上的转移矩阵.

设 $h_i(i \in E)$ 是一个 γ-可积过份函数，易证：这时有 $0 \leqslant h_i < +\infty(i \in E)$. 令

$$h = \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{7.5.3}$$

$$E^h = (i: h_i > 0) \tag{7.5.4}$$

$$p_{ij}^h = p_{ij} \frac{h_j}{h_i} \tag{7.5.5}$$

由于

$$p_{ij}^h = p_{ij} \frac{h_j}{h_i} \geqslant 0 \quad (i, j \in E^h) \tag{7.5.6}$$

$$\sum_{j \in E^h} p_{ij}^h = \frac{1}{h_i} \sum_{j \in E^h} p_{ij} h_j \leqslant \frac{h_i}{h_i} \leqslant 1 \tag{7.5.7}$$

所以 $P^h = (p_{ij}^h, i, j \in E)$ 是 E^h 上的一个转移矩阵.

引理 7.5.1. 若 $h_i(i \in E)$ 是一个过份函数，则

$$p_{ik} = 0 \quad (i \bar{\in} E^h, k \in E^h) \tag{7.5.8}$$

证. 设 $i \bar{\in} E^h$, $k \in E^h$, 则

$$0 = h_i \geqslant \sum_{j \in E} p_{ij} h_j \geqslant p_{ik} h_k \tag{7.5.9}$$

于是，由 $h_k > 0$ 立得 $p_{ik} = 0$. 引理证毕.

引理 7.5.2. 若 $h_i(i \in E)$是过份函数，则对每个固定的$j \in E^h$, $f_{ij}^*(i \in E)$ 如下唯一决定：

$$f_{jj}^* = 1 \tag{7.5.10}$$

$$f_{ij}^{*}=0 \quad (i\bar{\in}E^{h}) \tag{7.5.11}$$

而 $f_{ij}^{*}\ (i\in E^{h}\backslash\{j\})$ 是拟规格方程

$$x_{i}=\sum_{k\neq j}p_{ik}x_{k}+p_{ij} \quad (i\in E^{h}\backslash\{j\}) \tag{7.5.12}$$

的最小非负解.

证．由定理 7.4.1.，引理 7.5.1. 以及系 3.4.1 立得我们的引理.

定理 7.5.1. 设 $X^{h}(\omega)=\{x_{n}^{h}(\omega)\}$ 是以 P^{h} 为转移概率矩阵的马氏链，令

$$f_{ij}^{*h}=P(\text{存在 } n\geqslant 0,\text{ 使 } x_{n}^{h}=j\,|\,x_{0}^{h}=i)\ (i,j\in E^{h}) \tag{7.5.13}$$

则

$$f_{ij}^{*h}=f_{ij}^{*}\frac{h_{j}}{h_{i}} \quad (i,j\in E^{h}) \tag{7.5.14}$$

证．在证明过程中总认为 $i,j\in E^{h}$．由于

$$f_{jj}^{*h}=1=f_{jj}^{*}=f_{jj}^{*}\frac{h_{j}}{h_{j}}$$

所以只需对 $i\neq j$ 的情况进行证明．由定理 7.4.1 知，$f_{ij}^{*h}(i\in E^{h}\backslash\{j\})$ 是拟规格方程

$$x_{i}=\sum_{k\in E^{h}\backslash\{j\}}p_{ik}\frac{h_{k}}{h_{i}}x_{k}+p_{ij}\frac{h_{j}}{h_{i}} \quad (i\in E^{h}\backslash\{j\}) \tag{7.5.15}$$

的最小非负解．于是，由定理 3.3.3. 知，$h_{i}f_{ij}^{*h}\ (i\in E^{h}\backslash\{j\})$ 是拟规格方程

$$x_{i}=\sum_{k\in E^{h}\backslash\{j\}}p_{ik}x_{k}+p_{ij}h_{j} \quad (i\in E^{h}\backslash\{j\}) \tag{7.5.16}$$

的最小非负解．从而，由引理 7.5.2 和系 3.3.3 立得

$$h_{i}f_{ij}^{*h}=f_{ij}^{*}h_{j} \quad (i\in E^{h}\backslash\{j\}) \tag{7.5.17}$$

即

$$f_{ij}^{*h}=f_{ij}^{*}\frac{h_{j}}{h_{i}} \quad (i\in E^{h}\backslash\{j\}) \tag{7.5.18}$$

于是定理得证.

原书缺页

$$\sum_{i\in E^h} \gamma_i^h K^h(i,j) = \sum_{i\in E^h} h_i\gamma_i \frac{K(i,j)}{h_i} = \sum_{i\in E^h} \gamma_i K(i,j)$$

$$= \sum_{i\in E^h} \gamma_i \frac{f_{ij}^*}{n_j} = \frac{1}{n_j}\sum_{i\in E^h} \gamma_i f_{ij}^* = \frac{1}{n_j}\sum_{i\in E} \gamma_i f_{ij}^*$$

$$= \frac{n_j}{n_j} = 1 \quad (j\in E^h) \tag{7.5.26}$$

于是定理得证.

引理 7.5.3.

$$f_{ij}^* \geqslant f_{ik}^* f_{kj}^* \quad (i, j, k\in E) \tag{7.5.27}$$

证. 这个结果属于 Дынкин [15, 公式 (13)].

引理 7.5.4.

(i) 对于固定的 $i\in E$ 和 $a\in \mathscr{A}$,有

$$f_{ij}^* = \text{const} \quad (j\in E_a) \tag{7.5.28}$$

(ii)

$$f_{ij}^* = 1 \quad (i, j\in E_a) \tag{7.5.29}$$

$$f_{ij}^* = 0 \quad (i\in E_a, j\bar{\in} E_a) \tag{7.5.30}$$

证. 由诸 E_a ($a\in \mathscr{A}$) 为互不相交的不可约的常返类立得 (7.5.29) 和 (7.5.30). 设 $j, k\in E_a$, 由 (7.5.29) 和引理 7.5.3. 得

$$f_{ij}^* \geqslant f_{ik}^* f_{kj}^* = f_{ik}^* \tag{7.5.31}$$

同理

$$f_{ik}^* \geqslant f_{ij}^* \tag{7.5.32}$$

从而

$$f_{ij}^* = f_{ik}^* \tag{7.5.33}$$

所以 (7.5.28) 成立. 引理证毕.

定理 7.5.4. 对于任意固定的 $i\in E^h$ 有

$$K^h(i,j) \leqslant \frac{1}{h_i n_i} \quad (j\in E^h) \tag{7.5.34}$$

证.

由引理 7.5.3. 得

$$K^h(i,j)=\frac{K(i,j)}{h_i}=\frac{1}{h_i}\frac{f_{ii}^*}{n_j}=\frac{1}{h_i}\frac{f_{ii}^*}{\sum_{k\in E}\gamma_k f_{kj}^*}$$

$$\leqslant\frac{1}{h_i}\frac{f_{ii}^*}{\sum_{k\in E}\gamma_k f_{ki}^* f_{ij}^*}=\frac{1}{h_i}\frac{1}{\sum_{k\in E}\gamma_k f_{ki}^*}=\frac{1}{h_i n_i}\quad (i,j\in E^h)\tag{7.5.35}$$

于是定理得证.

定理 7.5.5. 令

$$E_a^h=E_a\cap E^h\tag{7.5.36}$$

则

(i) 对于任意固定的 $i\in E^h$, $a\in\mathscr{A}$ 有

$$K^h(i,j)=\text{const}\quad (j\in E_a^h)\tag{7.5.37}$$

如 $E_a^h\neq\varnothing$.

(ii) 对于任一 $a\in\mathscr{A}$ 有

$$K^h(i,j)=\text{const}\quad (i,j\in E_a^h)\tag{7.5.38}$$

$$K^h(i,j)=0\quad (i\in E_a^h,\ j\bar{\in} E_a^h)\tag{7.5.39}$$

如 $E_a^h\neq\varnothing$.

证. 由定理 7.5.3. 和引理 7.5.4. 立得我们的定理.

引理 7.5.5. 若 $h_i(i\in E)$ 是过份函数,则

$$K(i,j)=0\quad (i\bar{\in}E^h,\ j\in E^h)\tag{7.5.40}$$

证. 设 $i\bar{\in}E^h$, $j\in E^h$. 由

$$h_i\geqslant\sum_{k\in E}p_{ik}h_k\tag{7.5.41}$$

易得

$$h_i\geqslant\sum_{k\in E}p_{ik}^{(n)}h_k\quad (n=1,2,\cdots)\tag{7.5.42}$$

于是由 $i\bar{\in}E^h$, $j\in E^h$ 得

$$p_{ij}^{(n)}=0\tag{7.5.43}$$

即

$$i\not\rightsquigarrow j\tag{7.5.44}$$

从而

$$f_{ij}^*=0\tag{7.5.45}$$

于是由（7.4.21）立得（7.5.40）．引理证毕．

§7.6. 关于 Martin 核的一个极限定理

定理 7.6.1. 对于任一有限的测度 μ，在 Ω_∞ 上 P_r-几乎存在有限的极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in E}K(i,x_n)\mu_i \tag{7.6.1}$$

特别，对于任一 $i\in E$，在 Ω_∞ 上 P_r-几乎存在有限的极限

$$\lim_{n\to\infty}K(i,x_n)\mu_i \tag{7.6.2}$$

证．由引理 7.2.1、引理 7.2.2、引理 7.2.3 以及定理 7.2.1 知，对于任一 $a\in\{0\}\cup\mathscr{A}$，概率空间（$\Omega\Lambda_a$，$\mathscr{F}\Lambda_a$，$P(\cdot|\Lambda_a)$）上的马氏链 $X^a=\{x_n(\omega),0\leqslant n<\zeta(\omega)+1,\omega\in\Lambda_a\}$ 是 $P(\Lambda_a)$-链．

今分下列几步完成定理的证明：

（1）设 $i\bar{\in}E_a^+$，则由 Λ_a 之定义和引理7.5.5知，在 $(\Lambda_a\cap\Omega_\infty)\backslash\Delta_1$ 上有

$$K(i,x_n(\omega))=0\quad(n\geqslant 0) \tag{7.6.3}$$

其中

$$\Delta_1\subset\Lambda_a\cap\Omega_\infty \tag{7.6.4}$$

$$P_{\gamma^{P(\Lambda_a)}}(\Delta_1)=0 \tag{7.6.5}$$

于是在 $(\Lambda_a\cap\Omega_\infty)\backslash\Delta_1$ 上有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i\bar{\in}E_a^+}K(i,x_n(\omega))\mu_i=0 \tag{7.6.6}$$

（2）设 $i\in E_a^+$，$a\in\mathscr{A}$．则由 Λ_a 之定义知

$$f_{ij}^{*P(\Lambda_a)}=1\quad(i\in E_a^+,j\in E_a) \tag{7.6.7}$$

于是

$$K^{P(\Lambda_a)}(i,j)=\frac{1}{\sum_{k\in E_a^+}\gamma_kP_k(\Lambda_a)}\quad(i\in E_a^+,j\in E_a) \tag{7.6.8}$$

设 $\omega\in\Lambda_a$，则由 Λ_a 之定义知，存在 $N\geqslant 0$，当 $n\geqslant N$ 时

$$x_n(\omega)\in E_a \tag{7.6.9}$$

从而，由 (7.6.8) 知，当 $n \geqslant N$ 时

$$K(i,\ x_n(\omega)) = \frac{1}{\sum\limits_{k \in E_a^+} \gamma_k P_k(\Lambda_a)} \quad (i \in E_a^+) \tag{7.6.10}$$

所以在 $(\Delta_a \cap \Omega_\infty)$ 上有

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i \in E_a^+} K^{P(\Lambda_a)}(i,\ x_n(\omega))P_i(\Lambda_a)\mu_i$$

$$= \frac{\sum\limits_{i \in E_a^+} P_i(\Lambda_a)\mu_i}{\sum\limits_{k \in E_a^+} \gamma_k P_k(\Lambda_a)} < +\infty \tag{7.6.11}$$

(3) 设 $i \in E_a^+$，$a = 0$. 由定理 7.2.1 知，$P(\Lambda_a)$-链是瞬时链. 显然，当链是瞬时链时，我们所定义的 Martin 核与 Дынкин 在 [15] 中定义的 Martin 核一样，因此根据 [15，定理 3]，在 $(\Lambda_a \cap \Omega_\infty) \backslash \Delta_2$ 上存在有限的极限

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i \in E_0^+} K^{P(\Lambda_0)}(i,\ x_n(\omega))P_i(\Lambda_0)\mu_i \tag{7.6.12}$$

这里

$$\Delta_2 \subset \Lambda_0 \cap \Omega_\infty \tag{7.6.13}$$

$$P_{\gamma^{P(\Lambda_0)}}(\Delta_2) = 0 \tag{7.6.14}$$

(4) 由定理 7.5.3 知，在 Λ_a 上 $P_{\gamma^{P(\Lambda_a)}}$-几乎有

$$\sum_{i \in E_a^+} K(i,\ x_n)\mu_i = \sum_{i \in E_a^+} \frac{K(i,\ x_n)}{P_i(\Lambda_a)} P_i(\Lambda_a)\mu_i$$

$$= \sum_{i \in E_a^+} K^{P(\Lambda_a)}(i,\ x_n)P_i(\Lambda_a)\mu_i \quad (a \in \{0\} \cup \mathscr{A}) \tag{7.6.15}$$

(5) 若

$$\Delta \subset \Lambda_a \tag{7.6.16}$$

$$P_{\gamma^{P(\Lambda_a)}}(\Delta) = 0 \tag{7.6.17}$$

则

$$P_\gamma(\Delta) = \sum_{i\in E} \gamma_i P_i(\Delta) = \sum_{i\in E} \gamma_i P_i(\Lambda_a\Delta)$$
$$= \sum_{i\in E_a^+} \gamma_i P(\Lambda_a\Delta) = \sum_{i\in E_a^+} \gamma_i P_i(\Lambda_a) P_i(\Delta | \Lambda_a)$$
$$= \sum_{i\in E_a^+} \gamma_i^{P(\Lambda_a)} P_i(\Delta | \Lambda_a) = P_{\gamma^{P(\Lambda_a)}}(\Delta) = 0 \qquad (7.6.18)$$

由(1)—(5)和定理 7.2.1，立得我们的定理.

§ 7.7. Martin 边 界

令

$$N(i) = \begin{cases} i, & 若 \quad i \in E_0 \\ \inf\limits_{k\in E_a} k, & 若 \quad i \in E_a, \quad a \in \mathscr{A} \end{cases} \qquad (7.7.1)$$

$$d^h(i, j) = |2^{-N(i)} - 2^{-N(j)}| + \sum_{s\in E^h} |K^h(s, i) - K^h(s, j)| n_s^h 2^{-N(s)} \quad (i, j \in E^h) \qquad (7.7.2)$$

引理 7.7.1.[1)]

$$d^h(i, j) = d(i, j) \quad (i, j \in E^h) \qquad (7.7.3)$$

证. 由(7.5.23)、(7.5.21)以及(7.5.40)立得我们的引理.

引理 7.7.2. 若存在 $a, a' \in \mathscr{A}$ 使 $i_1, i_2 \in E_a \cap E^h$, $j_1, j_2 \in E_{a'} \cap E^h$，则

$$d^h(i_1, j_1) = d^h(i_2, j_2) \qquad (7.7.4)$$

证. 由定理 7.5.5 立得我们的引理.

引理 7.7.3.

(i) $d^h(i, j) \geqslant 0 \quad (i, j \in E^h)$. (7.7.5)

(ii) $d^h(i, j) = 0 \Longleftrightarrow$ 或者 $i = j$, 或者 $i \neq j$, 但存在 $a \in \mathscr{A}$，使 $i, j \in E_a \cap E^h$. (7.7.6)

(iii) $d^h(i, j) = d^h(j, i) \quad (i, j \in E^h)$. (7.7.7)

(iv) $d^h(i, j) + d^h(j, k) \geqslant d^h(i, k) \quad (i, j, k \in E^h)$. (7.7.8)

证. 由(7.7.1)，(7.7.2)以及定理 7.5.5. 立得此引理.

定理 7.7.1. h-链的状态空间 E^h 在引入由(7.7.2)定义的距离

---

1) 在(7.7.2)中把所有的 h 去掉，便得到 $d(i, j)$，$(i, j \in E)$ 的定义.

d^h 后构成一个距离空间，倘若对于同一个常返类 $E_a(a \in \mathscr{A})$ 中的每个状态都等同视之．而且

$$d^h(i, j) \leqslant 3 \quad (i, j \in E^h) \tag{7.7.9}$$

证．由引理7.7.2、引理7.7.3以及定理7.5.4立得我们的定理．

由引理 7.7.1 知，距离 $d^h(i, j)$ 就是距离 $d(i,j)$．因此，下面我们往往只谈论距离 d．

容易证明

定理 7.7.2. E^h 中的无穷叙列 $\{j_n\}$ 是距离空间 E^h 中的基本叙列的充要条件是下列两条同时成立：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} N(j_n)$ 存在（有限或 $+\infty$）．

(ii) 对任一 $i \in E^h$，$K^h(i, j_n)$ 是实数域中的柯西叙列．

由 (7.5.23) 和 (7.5.40) 易证

定理 7.7.3. E^h 中的无穷叙列 $\{j_n\}$ 是距离空间 E^h 中的基本叙列的充要条件是它是距离空间 E 中的基本叙列．

今把距离空间 E^h 按其距离 d^h 完备化，而得到完备的距离空间 E^{h*}（其中的距离仍用 d^h 表示），于是 E^h 是 E^{h*} 的稠子集．显然，若 $E_a^h = E_a \cap E^h \neq \emptyset (a \in \mathscr{A})$，则 $E_a^h = E_a$． $\partial E^h = E^{h*} \setminus E_0^h$ 叫做 Martin 边界[1]，其中 $E_0^h = E_0 \cap E^h$．

设 $i \in E^h$，$\xi \in \partial E^h$．显然

$$K^h(i, \xi) = \lim_{\substack{j_n \xrightarrow{d} \xi \\ j_n \in E^h}} K^h(i, j_n) \tag{7.7.10}$$

（$j_n \xrightarrow[d]{} \xi$ 表示在按距离 d 引出的拓扑下叙列 $j_n(n = 1, 2, \cdots)$ 的极限是 ξ）定义一个 h-过份函数，且满足

$$\sum_{i \in E^h} \gamma_i^h K^h(i, \xi) \leqslant 1 \tag{7.7.11}$$

由我们的定义知，函数 $K^h(\cdot, \cdot)$ 在乘积空间 $E^h \times E^{h*}$ 上连续，且

$$K^h(i,\xi) = \frac{1}{h_i} K(i, \xi) \quad (i \in E^h, \xi \in E^{h*}) \tag{7.7.12}$$

---

1) 注意：在 E^{h*} 及 ∂E^h 中凡等同视之的点都简约为一个点，下面不再随处声明．

定理 7.7.4. E^{h*} 是列紧完备距离空间，也是紧完备距离空间，且

$$d^h(\xi_1,\xi_2)=|2^{-N(\xi_1)}-2^{-N(\xi_2)}|+\sum_{s\in E^h}|K^h(s,\xi_1)-K^h(s,\xi_2)|n_s^h2^{-N(s)}\leqslant 3\quad(\xi_1,\xi_2\in E^{h*})\qquad(7.7.13)$$

其中

$$N(\xi)=+\infty,\ \xi\in E^{h*}\backslash E\qquad(7.7.14)$$

从而，E^{h*} 中的无穷叙列 $\{\xi_n\}$ 是其基本叙列的充要条件是下列两条同时成立：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}N(\xi_n)$ 存在(有限或$+\infty$)；

(ii) 对任一 $i\in E^h$，$K^h(i,\xi_n)$ 是实数域中的柯西叙列.

证. 注意[16，第一章§3的定理2]，只需证明 E^{h*} 具有列紧性和(7.7.13)式.

由引理7.5.4，定理7.5.2，(7.7.2)，(7.7.9)并注意 $d^h(\xi_1,\xi_2)$ 是 ξ_1，ξ_2 的连续函数立得(7.7.13).

由引理7.5.4和(7.7.10)知，对任一 $i\in E^h$，有

$$K^h(i,\xi)\leqslant\frac{1}{h_in_i}<+\infty\quad(\xi\in E^{h*})\qquad(7.7.15)$$

设 $\{\xi\}$ 是 E^{h*} 中的一个无穷子集. 从中选出一个无穷叙列 $\xi_n(n\geqslant 0)$ 使

$$\lim_{n\to\infty}N(\xi_n)=+\infty\qquad(7.7.16)$$

由(7.7.15)知，$K^h(0,\xi_n)$ $(n\geqslant 0)$ 是一个实有界叙列，故可从中选出一个无穷子叙列 $\xi_{0n}(n\geqslant 0)$ 使 $K^h(0,\xi_{0n})$ $(n\geqslant 0)$ 是一个实数域中的柯西叙列. 同理，可从 $\xi_{0n}(n\geqslant 0)$ 选出一个无穷子叙列 $\xi_{1n}(n\geqslant 0)$，使 $K^h(1,\xi_{1n})$ $(n\geqslant 0)$ 是一个实数域中的柯西叙列. 如此手续继续不已，得到可列个如下的无穷叙列：

$$\begin{array}{lllll}\xi_{00}, & \xi_{01}, & \cdots & \xi_{0n}, & \cdots\\ \xi_{10}, & \xi_{11}, & \cdots & \xi_{1n}, & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \xi_{i0}, & \xi_{i1}, & \cdots & \xi_{in}, & \cdots\\ \xi_{i+1,0}, & \xi_{i+1,1}, & \cdots & \xi_{i+1,n}, & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{array}$$

其中 $\xi_{i+1,n}(n \geqslant 0)$ 是 $\xi_{in}(n \geqslant 0)$ 的无穷子叙列,并对任一 $i \in E^h$, $K^h(i, \xi_{in})(n \geqslant 0)$ 是实数域中的柯西叙列. 于是 $\{\xi\}$ 中的无穷子叙列 $\xi_{nn}(n \geqslant 0)$ 有如下的性质: (1) $\lim_{n \to \infty} N(\xi_{nn}) = +\infty$; (2) 对任一 $i \in E^h$, $K^h(i, \xi_{nn})$ $(n \geqslant 0)$ 是实数域中的柯西叙列. 所以,由 E^{h*} 的完备性知 $\xi_{nn}(n \geqslant 0)$ 是 $\{\xi\}$ 的一个收敛叙列. 从而 E^{h*} 具有列紧性. 定理证毕.

容易证明

定理 7.7.5. E^{h*} 中的无穷叙列 $\{\xi_n\}$ 是 E^{h*} 中的基本叙列的充要条件是它是 E^* 中的基本叙列.

由定理 7.6.1 得

定理 7.7.6. 对于任意初始状态 $i \in E$ 和几乎一切不断的样本,如下的极限存在:

$$\text{d-}\lim_{n \to \infty} x_n = x_\infty \in \partial E \tag{7.7.17}$$

其中 $\text{d-}\lim_{n \to \infty} x_n$ 表示在由距离 d 引出的拓扑下叙列 $x_n(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 的极限.

§ 7.8. x_ζ 的 分 布

如果 $\zeta < +\infty$, 这时 x_ζ 是空间 E 中的一个点. 如果 $\zeta = +\infty$, 那么 $x_\zeta = x_\infty$, 且 $x_\infty \in \partial E$

设 D 为 E 的有限子集,令

$$\tau = \sup\,(n:\ x_n \in D) \tag{7.8.1}$$

随机变量 τ 可取 $0, 1, \cdots\cdots$ 以及 $+\infty$ 诸值. 若对一切 $n \geqslant 0$, $x_n \bar{\in} D$, 则我们认为 τ 没有定义. 令

$$L_0(i) = P_i(\tau = 0) = P_i(x_0 \in D,\ x_n \bar{\in} D,\ n \geqslant 1) \tag{7.8.2}$$

于是

$$L_0(i) = 0, \text{ 如 } i \text{ 为常返状态.} \tag{7.8.3}$$

及

$$P_i(x_\tau = j) = \sum_{m=0}^{\infty} P_i(\tau = m,\ x_m = j)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} P_i(x_m = j) L_0(j) \tag{7.8.4}$$

由 (7.4.16),(7.8.3) 和 (7.8.4) 得

$$P_i(x_\tau = j) = \begin{cases} 0, & \text{若 } i \text{ 为常返状态} \\ f_{ij}^* g_{jj} L_0(j), & \text{若 } i \text{ 为非常返状态} \end{cases} \tag{7.8.5}$$

从而

$$P_\gamma(x_\tau = j) = \begin{cases} 0, & \text{若 } i \text{ 为常返状态} \\ n_j g_{jj} L_0(j), & \text{若 } i \text{ 为非常返状态} \end{cases} \tag{7.8.6}$$

由 (7.4.21),(7.8.5) 和 (7.8.6) 得

$$P_i(x_\tau = j) = K(i, j) P_\gamma(x_\tau = j) \tag{7.8.7}$$

由以上诸式并参考 [15, §10],易证,若 f 是 E^* 上的连续函数或非负 Borel 可测函数,则

$$E_i f(x_\zeta) = \int_{E^*} K(i, \xi) f(\xi) \mu_1(d\xi) \tag{7.8.8}$$

其中

$$\mu_1(\Gamma) = P_\gamma(x_\zeta \in \Gamma) \tag{7.8.9}$$

这里 Γ 是 E^* 中的 Borel 集. 于是,若令 $f = \chi_\Gamma$, 我们得到

$$P_i(x_\zeta \in \Gamma) = \int_\Gamma K(i, \xi) \mu_1(d\xi) \tag{7.8.10}$$

其中

$$\chi_\Gamma(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi \bar{\in} \Gamma \\ 1 & \xi \in \Gamma \end{cases} \tag{7.8.11}$$

还容易证明

$$\mu_1(j) = n_j g_{jj} \left(1 - \sum_{k \in E} p_{jk}\right) \quad (j \in E) \tag{7.8.12}$$

§7.9. 过份函数的 Martin 表达式

设 h 为 γ-可积过份函数,令

$$\mu_h(\Gamma) = P_{\gamma^h}^h (x_\zeta \in \Gamma) \tag{7.9.1}$$

其中 Γ 是 E^{h*} 中的 Borel 集. 把公式 (7.8.8) 应用于 h-链,则得

$$E_i^h f(x_\zeta) = \frac{1}{h_i}\int_{E^*} K(i,\xi) f(\xi)\mu_h(d\xi) \quad (i \in E) \qquad (7.9.2)$$

在公式(7.9.2)中令 $f=1$，我们得到

$$h_i = \int_{E^*} K(i,\xi)\mu_h(d\xi) \quad (i \in E) \qquad (7.9.3)$$

(7.9.3)叫做过份函数 h 的 Martin 表达式，μ_h 叫做 h 的谱测度.

把公式(7.8.12)应用于 h-链，我们得到

$$\mu_h(j) = n_j g_{jj}\left(h_j - \sum_{k\in E} p_{jk}h_k\right) \quad (j \in E_0 \cap E^h) \qquad (7.9.4)$$

但显见(7.9.4)对 $j \in E_0 \setminus E_0 \cap E^h$ 也成立，故有

$$\mu_h(j) = n_j g_{jj}\left(h_j - \sum_{k\in E} p_{jk}h_k\right) \quad (j \in E) \qquad (7.9.5)$$

§7.10. 流出空间

令

$$\bar{f}_{ij}^* = P_i\,(\text{存在 } n>0,\ \text{使 } x_n = j) \quad (i, j \in E) \qquad (7.10.1)$$

由 f_{ij}^* 与 $\bar{f}_{ij}^*$ 的定义易知

$$\bar{f}_{ij}^* = \begin{cases} f_{ij}^* & (i \neq j) \\ \sum_{k\in E} p_{ik} f_{kj}^* & (i = j) \end{cases} \qquad (7.10.2)$$

由 [1, I, §10] 知

$$g_{jj}(1-\bar{f}_{jj}^*) = 1 \quad (j \in E_0) \qquad (7.10.3)$$

定理 7.10.1. 对于任一 $k \in E_0$ 有

$$\mu_{K(\cdot,k)} = \delta_k \qquad (7.10.4)$$

其中 δ_k 是集中于 k 的单位测度.

证. 由(7.4.21)和(7.10.2)得

$$\sum_{s\in E} p_{ks}K(s,k) = \sum_{s\in E} p_{ks}\frac{f_{sk}^*}{n_k} = \frac{1}{n_k}\sum_{k\in E} p_{ks} f_{sk}^*$$

$$= \frac{1}{n_k}\bar{f}_{kk}^* = \frac{1}{n_k}(1-(1-\bar{f}_{kk}^*)) = \frac{1}{n_k}(f_{kk}^* - (1-\bar{f}_{kk}^*))$$

$$= K(k,k) - \frac{1-\bar{f}_{kk}^*}{n_k} \qquad (7.10.5)$$

由(7.9.5)，(7.10.3)以及(7.10.5)得

$$\mu_{K(\cdot,k)}(k) = n_k g_{kk}\left[K(k,k) - \sum_{s\in E} p_{ks}K(s,k)\right]$$

$$= n_k g_{kk}\frac{1-f_{kk}^*}{n_k} = g_{kk}(1-f_{kk}^*) = 1 \tag{7.10.6}$$

由(7.5.25)和(7.9.1)

$$\mu_{K(\cdot,k)}(E^*) = \sum_{i\in E}\gamma_i K(i,k) = 1 \tag{7.10.7}$$

由(7.10.6)和(7.10.7)立得我们的定理.

定义 7.10.1. 令

$$B = (\xi:\ \xi\in\partial E,\ \mu_{K(\cdot,\xi)} = \delta_\xi) \tag{7.10.8}$$

并称 B 为流出空间，B 的点称为流出点.

仿[15，定理5]的证明立得

定理 7.10.2. 流出空间 B 是 ∂E 的一个 Borel 集. 对于任一 γ-可积过份函数 h，有 $\mu_h(\partial E\backslash B) = 0$. 如 $\xi\in B$，则 $K(\cdot,\xi)$ 是调和函数，且

$$\sum_{i\in E}\gamma_i K(i,\xi) = 1 \tag{7.10.9}$$

§7.11. 唯一性定理

仿[15，定理6]的证明立得

定理 7.11.1. 所有 γ-可积过份函数 h 能唯一地表示为

$$h_i = \int_{E_0\cup B} K(i,\xi)\mu(d\xi) \quad (i\in E) \tag{7.11.1}$$

其中 μ 是 Borel 集 $E_0\cup B$ 上的有限测度；反之，对任 $E_0\cup B$ 上的有限测度 μ，公式(7.11.1)定义一个 γ-可积过份函数. 当且仅当 $\mu(E_0) = 0$ 时这个函数是调和函数.

§7.12. 极小过份函数

定义 7.12.1. 非零的过份函数 h 叫做是极小的，如果由 $h = h_1 + h_2$（其中 h_1 和 h_2 也是过份函数）能推出 $h_1 = c_1 h$，$h_2 = c_2 h$

(c_1 和 c_2 是常数).

仿 [15, 定理 7] 的证明立得

定理 7.12.1. γ-可积极小过份函数的一般形式为 $cK(\cdot, \xi)$，其中 $\xi \in E_0 \cup B$，c 是任意正常数.

§ 7.13. 终极随机变量

从本节开始，我们把 P_γ 简记为 P. 在本节我们把概率空间 Ω 中的点 ω，与样本空间中的点 $(x_0(\omega), x_1(\omega), \cdots, x_{\zeta(\omega)}(\omega))$ (如 $\zeta(\omega) < +\infty$) 或 $(x_0(\omega), x_1(\omega), \cdots)$ (如 $\zeta(\omega) = +\infty$) 等同起来.

考虑定义在 $\Omega_1 = (\omega: \zeta(\omega) \geqslant 1)$ 上的变换 T: 它把 $(i_0, i_1, \cdots, i_n)$ 及 $(i_0, i_1, \cdots)$ 分别变成 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 及 $(i_1, i_2, \cdots)$.

对任一随机变量 $\varphi(\omega)$，令

$$\hat{T}\varphi(\omega) = \begin{cases} \varphi(T\omega) & \omega \in \Omega_1 \\ 0 & \omega \bar{\in} \Omega_1 \end{cases} \tag{7.13.1}$$

定义 7.13.1. 如果对于随机变量 φ 有

$$\hat{T}\varphi = \varphi \tag{7.13.2}$$

则称 φ 为终极随机变量. 对于 Ω 的任一可测子集 Λ，如果 χ_Λ 是终极随机变量，则称 Λ 为终极集.

显然，终极随机变量在 $\Omega \backslash \Omega_\infty$ 上等于零，因而终极集属于 Ω_∞.

若 $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathscr{F}$，且 $P((\Lambda_1 \backslash \Lambda_1\Lambda_2) \cup (\Lambda_2 \backslash \Lambda_2\Lambda_1)) = 0$，则说 Λ_1 和 Λ_2 等价，并记作 $\Lambda_1 \doteq \Lambda_2$.

定义 7.13.2. 不可能分成两个正概率终极集之和的正概率终极集叫做原子终极集.

显然，终极随机变量在原子终极集上等于常数.

令[1]

$$\mathscr{L}(A) = (\omega: \omega \in \Omega_\infty, \text{有无穷多个 } n, \text{使 } x_n(\omega) \in A) \tag{7.13.3}$$

---

1) 下面几个记号和名词都给出了定义，而无直接引用 [1, I, § 17]. 这是考虑到我们这里的马氏链允许 $P(\Omega_\infty) < 1$，这与 [1] 中不同.

$$\underline{\mathscr{L}}(A)=(\omega:\ \omega\in\Omega_\infty,\ \text{存在}\ N\geqslant 0,\ \text{当}\ n\geqslant N\ \text{时},\ \text{有}\ x_n(\omega)\in A) \tag{7.13.4}$$

定义 7.13.3. 设 A 为集 E 的子集．若

$$P(\overline{\mathscr{L}}(A))=P(\underline{\mathscr{L}}(A))>0 \tag{7.13.5}$$

则 A 叫做几乎闭集．若

$$P(\overline{\mathscr{L}}(A))=0 \tag{7.13.6}$$

则 A 叫做不可回集．

显然，若 A 为不可回集，或几乎闭集，则 $\overline{\mathscr{L}}(A)\doteq\underline{\mathscr{L}}(A)$，这时我们用 $\mathscr{L}(A)$ 表示与 $\overline{\mathscr{L}}(A)$，$\underline{\mathscr{L}}(A)$ 等价的任一终极集．

定义 7.13.4. 不能表示成两个互不相交几乎闭集之和的几乎闭集叫做原子几乎闭集；不包含原子几乎闭集的几乎闭集叫做完全非原子几乎闭集．

定义 7.13.5. 设 $\xi\in B$，若 $\mu_1(\xi)>0$，则把 ξ 叫做原子流出点，否则叫做非原子流出点．

容易证明下面两个定理：

定理 7.13.1. 原子终极集 Λ，原子几乎闭集 A 和原子流出点 ξ 之间，在如下的条件下建立了一一对应关系：

$$\Lambda\doteq(\mathscr{L}(A))\doteq(\omega:\ x_\infty(\omega)=\xi) \tag{7.13.7}$$

定理 7.13.2. 每个有界的调和函数 h 对应一个非负有界的终极随机变量 φ，使

$$h_i=E_i\varphi \tag{7.13.8}$$

反之亦然．且在 Ω_∞ 上几乎成立如下的等式：

$$\lim_{n\to\infty}h_{x_n(\omega)}=\varphi(\omega) \tag{7.13.9}$$

§7.14. 位势、过份函数的判别准则和 Riesz 分解

本节的结果具有独立存在的意义．设立本节的目的主要是为下节作准备．

定理 7.14.1. 非负函数 $f_i(i\in E)$ 叫做非负函数的位势的充要条件是存在非负函数 $v_i(i\in E)$，使 $f_i(i\in E)$ 是第一型囿壹方程

$$x_i = \sum_{j\in E} p_{ij}x_j + v_i \quad (i\in E) \tag{7.14.1}$$

的最小非负解.

证. 由定理 3.8.1 和位势的定义立得我们的定理.

定理 7.14.1 说明,我们的"最小非负解理论"不是别的,正是当今在马尔可夫过程研究中最为活跃的位势理论.

容易证明

定理 7.14.2. $h_i(i\in E)$是过份函数的充要条件是存在非负函数 $v_i(i\in E)$,使 $h_i(i\in E)$是第一型囿壹方程

$$x_i = \sum_{j\in E} p_{ij}x_j + v_i \quad (i\in E) \tag{7.14.2}$$

的非负解.

定义 7.14.2. 设 $h_i(i\in E)$ 为过份函数,令

$$v_i = h_i - \sum_{j\in E} p_{ij}h_j \quad (i\in E) \tag{7.14.3}$$

则 $v_i(i\in E)$ 叫做 $h_i(i\in E)$ 的过份量.

显然,过份函数 $h_i(i\in E)$ 的过份量 $v_i(i\in E)$ 为 $h_i(i\in E)$ 唯一决定.

由定理 7.14.1 和定理 7.14.2 易证

定理 7.14.3. (Riesz 分解) 设 $h_i(i\in E)$ 是过份函数, 则 $h_i(i\in E)$ 能唯一分解成如下形式:

$$h_i = b_i + f_i \quad (i\in E) \tag{7.14.4}$$

其中 $b_i(i\in E)$ 是调和函数, $f_i(i\in E)$ 是 $h_i(i\in E)$ 的过份量 $v_i(i\in E)$的位势.

§ 7.15. 极小调和函数、极小位势和极小过份函数的判别准则

定义 7.15.1. 一个极小过份函数如果又是调和函数 (位势), 则它叫做极小调和函数(极小位势).

在[12],[13]以及[15]等文献中都只给出极小调和函数的定义,而无给出它的有效的判别准则. 但这在应用上是不够的. 例

如，要从边界 ∂E 中把流出空间 B 区分出来，就要首先能对 ∂E 中的任一点 ξ，判定 $K(\cdot,\xi)$ 是否是极小调和函数．本节的目的是给出极小调和函数的判别准则．也顺便给出极小位势和极小过份函数的判别准则．

易证，若 $h_i(i\in E)$ 是极小过份函数，则 $0\leqslant h_i<+\infty(i\in E)$．所以下面只考虑有限的过份函数．

定理 7.15.1. 有限调和函数 $b_i(i\in E)$ 是极小的充要条件是方程

$$x_i=\sum_{j\in E^b}p_{ij}\frac{b_j}{b_i}x_j \quad (i\in E^b) \tag{7.15.1}$$

不存在非常数非负有界解，其中 $E^b=(i:\ b_i>0)$．

证．(一) 必要性

设 $b_i(i\in E)$ 是有限极小调和函数．

若 (7.15.1) 有非常数的非负有界解 $b_i^{(1)}(i\in E^b)$．由于 $b_i^{(1)}$ $(i\in E^b)$ 有界，故不失一般性可设 $b_i^{(1)}\leqslant 1(i\in E^b)$．令

$$b_i^{(2)}=1-b_i^{(1)} \quad (i\in E^b) \tag{7.15.2}$$

于是

$$0\leqslant b_i^{(2)}\leqslant 1 \quad (i\in E^b) \tag{7.15.3}$$

易证 $b_i^{(2)}(i\in E^b)$ 也是(7.15.1)的一个非常数非负有界解，而且由于(7.15.2)，$b_i^{(1)}(i\in E^b)$ 和 $b_i^{(2)}(i\in E^b)$ 不成比例．令

$$b_i^{(1)}=b_i^{(2)}=0 \quad (i\bar{\in} E^b) \tag{7.15.4}$$

于是由引理 7.5.1 知

$$\sum_{j\in E}p_{ij}b_jb_j^{(1)}=\sum_{j\in E^b}p_{ij}b_jb_j^{(1)}=b_i\sum_{j\in E^b}p_{ij}\frac{b_j}{b_i}b_j^{(1)}=b_ib_i^{(1)} \quad (i\in E^b) \tag{7.15.5}$$

$$\sum_{j\in E}p_{ij}b_jb_j^{(1)}=\sum_{j\in E^b}p_{ij}b_jb_j^{(1)}=\sum_{j\in E^b}0b_jb_j^{(1)}=0=b_ib_i^{(1)} \quad (i\bar{\in} E^b) \tag{7.15.6}$$

由 (7.15.5) 和 (7.15.6) 知 $b_ib_i^{(1)}$ $(i\in E)$ 是调和函数．同理可证，$b_ib_i^{(2)}$ 也是调和函数．显然有

$$b_i=b_ib_i^{(1)}+b_ib_i^{(2)} \quad (i\in E) \tag{7.15.7}$$

而且 $b_i b_i^{(1)}(i\in E)$和 $b_i b_i^{(2)}$ 不成比例，因而 $b_i(i\in E)$ 和 $b_i b_i^{(1)}(i\in E)$ 也不成比例. 但这与 $b_i(i\in E)$ 的极小性矛盾. 因此(7.15.1)不可能有非常数非负的有界解.

（二）充分性

设(7.15.1)不存在非常数的非负有界解.

若 $b_i(i\in E)$ 不是极小的，于是有

$$b_i = b_i^{(1)} + b_i^{(2)} \quad (i\in E) \tag{7.15.8}$$

且 $b_i^{(1)}(i\in E)$ 是不与 $b_i(i\in E)$ 成比例的调和函数，于是

$$0\leqslant \frac{b_i^{(1)}}{b_i}\leqslant 1,\quad \frac{b_i^{(1)}}{b_i}\neq \text{const}\quad (i\in E^b) \tag{7.15.9}$$

注意 $b_i^{(1)}=0\ (i\bar{\in} E^b)$ 得

$$\sum_{j\in E^b} p_{ij}\frac{b_j}{b_i}\cdot\frac{b_j^{(1)}}{b_j}=\frac{1}{b_i}\sum_{j\in E^b} p_{ij}b_j^{(1)}=\frac{1}{b_i}\sum_{j\in E} p_{ij}b_j^{(1)}=\frac{b_i^{(1)}}{b_i}$$
$$(i\in E^b) \tag{7.15.10}$$

所以，$\dfrac{b_i^{(1)}}{b_i}\ (i\in E^b)$ 是(7.15.1)的非常数的非负有界解. 但这与假设不符. 所以，$b_i(i\in E)$ 必极小.

至此，定理获证.

容易证明下面三个定理.

定理 7.15.2. 有限位势 $f_i(i\in E)$ 是极小的充要条件是它的过份量(把 $f_i(i\in E)$ 视为过份函数) $v_i(i\in E)$ 具有如下性质：存在 $i_0\in E_0$，使

$$\left.\begin{aligned} &0< v_{i_0} < +\infty \\ &v_i = 0\quad (i\neq i_0)\end{aligned}\right\} \tag{7.15.11}$$

换言之，当且仅当非负函数 $v_i(i\in E)$ 具有性质(7.15.11)时它的位势才是极小位势.

定理 7.15.3. 有限位势 $f_i(i\in E)$ 是极小的充要条件是存在常数 $c>0$ 及 $j\in E_0$，使

$$f_i = c g_{ij}\quad (i\in E) \tag{7.15.12}$$

定理 7.15.4. 有限过份函数 $h_i(i\in E)$ 是极小的充要条件是

下列两条任一成立:

(i) $h_i(i\in E)$ 是极小调和函数.

(ii) $h_i(i\in E)$ 是极小位势.

§ 7.16. 原子流出空间和非原子流出空间

定义 7.16.1. 一切原子流出点所构成的集记为 B_1，叫做原子流出空间；一切非原子流出点所构成的集记为 B_2，叫做非原子流出空间.

定理 7.16.1. 设 $\xi\in B$，则 $\xi\in B_1$ 的充要条件是 $K(\cdot,\xi)$ 有界.

证. (一) 必要性

设 ξ 为原子流出边界点,即

$$\mu_1(\xi)>0 \tag{7.16.1}$$

由 (7.8.10) 知

$$P_i(x_\zeta=\xi)=K(i,\xi)\mu_1(\xi)\quad(i\in E) \tag{7.16.2}$$

于是

$$K(i,\xi)=\frac{P_i(x_\zeta=\xi)}{\mu_1(\xi)}\leqslant\frac{1}{\mu_1(\xi)}<+\infty\quad(i\in E) \tag{7.16.3}$$

从而 $K(\cdot,\xi)$ 有界.

(二) 充分性

设 $\xi\in B$，且 $K(\cdot,\xi)$ 有界. 这时 $K(\cdot,\xi)$ 是有界调和函数. 故由定理 7.13.2 知,存在一个非负有界终极随机变量 φ，使

$$K(\cdot,\xi)=E_i\varphi\quad(i\in E) \tag{7.16.4}$$

令

$$\Lambda=(\omega:\ \varphi(\omega)\neq 0) \tag{7.16.5}$$

于是由 $\xi\in B$ 和 (7.16.4) 知

$$P(\Lambda)\neq 0 \tag{7.16.6}$$

显然 Λ 是一个终极集. 往证 Λ 是一个原子终极集. 事实上，若存在终极集 Λ_1，Λ_2 使

$$\Lambda=\Lambda_1\cup\Lambda_2,\ \Lambda_1\cap\Lambda_2=\varnothing,\ P(\Lambda_1)>0,\ P(\Lambda_2)>0 \tag{7.16.7}$$

于是函数

$$\varphi_j(\omega)=\begin{cases}\varphi(\omega) & \omega\in\Lambda_j\\ 0 & \omega\bar{\in}\Lambda_j\end{cases}\quad (j=1,\ 2) \tag{7.16.8}$$

仍是有界终极随机变量．于是，由定理(7.13.2)知，对任一$j\in(1,2)$

$$f_i^{(j)}=E_i\varphi_j\quad (i\in E) \tag{7.16.9}$$

是不恒为零的有界调和函数，且在Ω_∞上几乎有

$$\lim_{n\to\infty} f^{(j)}_{x_n(\omega)}\neq 0\quad (\omega\in\Lambda_j\cap\Omega_\infty) \tag{7.16.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} f^{(j)}_{x_n(\omega)}=0\quad (\omega\bar{\in}\Lambda_j\cap\Omega_\infty) \tag{7.16.11}$$

由(7.16.7)，(7.16.10)和(7.16.11)知$f_i^{(1)}(i\in E)$和$f_i^{(2)}(i\in E)$不成比例．由(7.16.4)，(7.16.6)，(7.16.8)以及(7.16.9)知

$$K(i,\xi)=f_i^{(1)}+f_i^{(2)}\quad (i\in E) \tag{7.16.12}$$

于是，由$f_i^{(1)}(i\in E)$和$f_i^{(2)}(i\in E)$不成比例知$K(i,\xi)$ $(i\in E)$和$f_i^{(1)}(i\in E)$，$f_i^{(2)}(i\in E)$不成比例．但这与$K(\cdot,\xi)$的极小性矛盾．故Λ必为原子终极集．于是，由在§7.13中曾提及的"终极随机变量在原子终极集上等于常数"这一事实得

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}c & \omega\in\Lambda\\ 0 & \omega\bar{\in}\Lambda\end{cases} \tag{7.16.13}$$

其中$c>0$为常数．由(7.16.4)和(7.16.13)得

$$K(i,\ \xi)=cP_i(\Lambda)\quad (i\in E) \tag{7.16.14}$$

由Λ为原子终极集和定理(7.13.1)知，存在原子流出边界点ξ^0，使

$$P_i(\Lambda)=P_i(x_\zeta=\xi^0)=K(i,\xi^0)\mu_1(\xi^0) \tag{7.16.15}$$

由(7.16.14)和(7.16.15)得

$$K(i,\ \xi)=K(i,\ \xi^0)c\mu_1(\xi^0) \tag{7.16.16}$$

由(7.16.16)和(7.10.9)得

$$K(i,\ \xi)=K(i,\ \xi^0)\quad (i\in E) \tag{7.16.17}$$

于是有$\xi=\xi^0$，从而ξ是原子流出边界点．至此，定理获证．

定义 7.16.2. 每个有限极小调和函数叫做方程

$$x_i=\sum_{j\in E}p_{ij}x_j\quad (i\in E) \tag{7.16.18}$$

的一个极小解.

定理 7.16.2. $B_1 = \varnothing$ 的充要条件是方程(7.16.18)不存在有界极小解; $B_2 = \varnothing$ 的充要条件是方程(7.16.18)不存在 γ-可积的无界极小解.

证. 由定理 7.12.1, 定理 7.16.1 以及如下的简单事实立得我们的定理: 对任一标准测度 γ, E 上的有界非负函数总 γ-可积.

§ 7.17. 状态空间的 Blackweel 分解

在本节我们假定

$$\sum_{j \in E} p_{ij} = 1 \quad (i \in E) \tag{7.17.1}$$

定理 7.17.1. 设 A 为几乎闭集, 则它是完全非原子几乎闭集的充要条件是方程

$$x_i = \sum_{j \in E} p_{ij} \frac{P_j(\mathscr{L}(A))}{P_i(\mathscr{L}(A))} x_j \quad (i \in E^{p(\mathscr{L}(A))}) \tag{7.17.2}$$

不存在有界极小解. 其中 $E^{p(\mathscr{L}(A))} = (i: P_i(\mathscr{L}(A)) > 0)$.

证. 由定理 6.8.2 知, A 是完全非原子几乎闭集的充要条件是 E 是$P(\mathscr{L}(A))$-链的完全非原子几乎闭集. 再把定理 7.13.1 和定理 7.16.2 应用到 $P(\mathscr{L}(A))$-链上立得我们的定理.

由定理 6.8.3 和定理 7.17.2 立得状态空间 E 的 Blackweel 分解的判别准则, 但其陈述几乎是该二定理的重复, 故不赘述.

第八章　Martin 流入边界理论

§8.1. 引　言

为了简约，下面把马氏链 $X(\omega)=\{x_n(\omega), n<\zeta(\omega)+1\}$ 与其转移概率矩阵 $P=(p_{ij}; i, j\in E)$ 等同起来，也称 P 为马氏链.

定义 8.1.1. 定义在 E 上的非负函数 $v_j(j\in E)$ 叫做（P 的）过份测度，如果

$$v_j \geqslant \sum_{k\in E} v_k p_{kj} \quad (j\in E) \tag{8.1.1}$$

过份测度 $v_j(j\in E)$ 叫做调和测度，如果对一切

$$j\in E, \quad v_j=\sum_{k\in E} v_k p_{kj}$$

即 (8.1.1) 是等式. 过份测度 $v_j(j\in E)$ 叫做有限正的，如果

$$0<v_j<+\infty \quad (j\in E) \tag{8.1.2}$$

马氏链的 Martin 流入边界理论与 Martin 流出边界理论一起发展起来[12],[13],[15]. 所采用的方法实质上都是借助于一个有限正过份测度把所研究的马氏链的流入边界归结为另一马氏链（叫做伴随链）的流出边界. 因此，关于 Martin 流入边界理论，前人只是对满足下列两个条件的马氏链建立起来：

(i) 存在有限正过份测度 $\alpha_j(j\in E)$;

(ii) 能对伴随链 $\tilde{P}=(\tilde{p}_{ij}, i, j\in E)$ 建立流出边界，其中

$$\tilde{p}_{ij}=\frac{\alpha_j}{\alpha_i} p_{ji} \quad (i, j\in E) \tag{8.1.3}$$

我们在第七章中对一般马氏链建立了流出边界，因此条件 (ii) 已为我们所解除.

本章的目的是：把条件 (i) 也加以解除，而对一般马氏链建立 Martin 流入边界理论.

本章内容可分为两部份．第一部份（§8.2—§8.3）是：（A）给出条件（i）成立的充要条件，从而可以看出前人建立的流入边界理论的适用范围；（B）指出在一般情况下条件（i）不成立的原因，从而立刻看出建立一般马氏链的流入边界理论的途径．所以这一部份是起承上启下的作用．第二部份（§8.4—§8.6）是建立一般马氏链的流入边界理论．

§8.2. 第一组引理

定义 8.2.1. 若 E 构成一个不可约常返类，则称 P 为不可约常返链．

引理 8.2.1. 若马氏链 P 为不可约常返链，则存在有限正过份测度．

证．由[1, I, 定理 9.5 的系 1 和定理 9.7]立得此引理．

引理 8.2.2. 若马氏链 P 是瞬时链，则存在有限正过份测度．

证．令

$$v_j = \sum_{i \in E} 2^{-(i+1)} g_{ij} \quad (j \in E) \tag{8.2.1}$$

由 P 是瞬时链知

$$0 \leqslant g_{ij} < +\infty, \quad g_{jj} \geqslant 1 \quad (i, j \in E) \tag{8.2.2}$$

由定理 7.4.4 知

$$g_{ij} = f^*_{ij} g_{jj} \quad (i, j \in E) \tag{8.2.3}$$

由（8.2.1）和（8.2.2）得

$$v_j = \sum_{i \in E} 2^{-(i+1)} g_{ij} \geqslant 2^{-(j+1)} g_{jj} > 0 \quad (j \in E) \tag{8.2.4}$$

由（8.2.1），（8.2.2）及（8.2.3）得

$$\begin{aligned} v_j &= \sum_{i \in E} 2^{-(i+1)} g_{ij} = \left(\sum_{i \in E} 2^{-(i+1)} f^*_{ij} \right) g_{jj} \\ &\leqslant \left(\sum_{i \in E} 2^{-(i+1)} \right) g_{jj} = g_{jj} < +\infty \quad (j \in E) \end{aligned} \tag{8.2.5}$$

由马氏性得

$$\begin{cases} p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} \\ p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj} \quad (n = 0, 1, \cdots; i, j \in E) \end{cases} \tag{8.2.6}$$

（其中 $\delta_{ii} = 1$，$\delta_{ij} = 0$（$i \neq j$））于是由（8.2.2）和系 3.2.3 知，对任一固定的 i（$i \in E$），$\{g_{ij}, j \in E\}$ 是非负线性方程组

$$x_j = \sum_{k \in E} x_k p_{kj} + \delta_{ij} \quad (j \in E) \tag{8.2.7}$$

的最小非负解．再由（8.2.1）和定理 3.3.2 知，v_j（$j \in E$）是非负线性方程组：

$$x_j = \sum_{k \in E} x_k p_{kj} + 2^{-(j+1)} \quad (j \in E) \tag{8.2.8}$$

的最小非负解．从而

$$v_j \geqslant \sum_{k \in E} v_k p_{kj} \quad (j \in E) \tag{8.2.9}$$

由（8.2.4），（8.2.5）和（8.2.9）知，v_j（$j \in E$）是有限正过份测度．于是引理得证

引理 8.2.3. 设马氏链 P 是不可约的常返链．若 v_j（$j \in E$）是过份测度，但不是调和测度，则

$$v_j = +\infty \quad (j \in E) \tag{8.2.10}$$

证．由假设知，存在 $i_0 \in E$ 及常数 $a > 0$，使

$$v_j \geqslant 0, \quad v_j \geqslant \sum_{k \in E} v_k p_{kj} + \delta_{i_0 j} a \quad (j \in E) \tag{8.2.11}$$

即 v_j 是非负线性方程组

$$x_j \geqslant \sum_{k \in E} x_k p_{kj} + \delta_{i_0 j} a \quad (j \in E) \tag{8.2.12}$$

的非负解．但由系 3.3.3 和引理 8.2.2 的证明过程知，$\{a g_{i_0 j}, j \in E\}$ 是非负线性方程组

$$x_j = \sum_{k \in E} x_k p_{kj} + \delta_{i_0 j} a \quad (j \in E) \tag{8.2.13}$$

的最小非负解．于是由定理 3.3.1 知

$$v_j \geqslant a g_{i_0 j} \quad (j \in E) \tag{8.2.14}$$

但由 P 为不可约的常返链知

$$g_{i_0 j} = +\infty \quad (j \in E) \tag{8.2.15}$$

于是,由 $a > 0$ 和(8.2.14)立得(8.2.10)引理证毕.

令

$$E_{00} = (i:\ i \in E_0,\ 且存在\ j \in E \setminus E_0\ 使\ i \rightsquigarrow j) \tag{8.2.16}$$

$$E_1 = E \setminus E_{00} \tag{8.2.17}$$

$$P_1 = (p_{ij},\ i,\ j \in E_1) \tag{8.2.18}$$

定义 8.2.2. 若 $E_{00} = \varnothing$, 则称 P 为无桥链.

显见有

引理 8.2.4. $P_1 = (p_{ij},\ i,\ j \in E_1)$ 为无桥链.

§ 8.3. 有限过份测度的性质

定理 8.3.1. $v_j(j \in E)$ 是 P 的有限过份测度的充要条件是下列两条同时成立:

(i) $v_j = 0 \quad (j \in E_{00})$. (8.3.1)

(ii) $v_j(j \in E_1)$ 是 P_1 的有限过份测度.

证. 显然只需证明必要性.

设 $v_j(j \in E)$ 是 P 的有限过份测度. 下面我们只证明 (i) 成立,因为 (ii) 是 (i) 的直接推论.

若 $E_{00} = \varnothing$, 则 (i) 平凡,故设 $E_{00} \neq \varnothing$. 于是在 E_{00} 中任取一元 i_0, 则存在 $a_0 \in \mathscr{A}$ 及 $j \in E_{a_0}$ 使

$$p_{i_0 j_0} > 0 \tag{8.3.2}$$

由 $v_j(j \in E)$ 是过份测度知

$$v_j \geqslant 0,\ v_j \geqslant \sum_{k \in E_{a_0}} v_k p_{kj} + \delta_{j_0 j} v_{i_0} p_{i_0 j_0} \quad (j \in E_{a_0}) \tag{8.3.3}$$

若 $v_{i_0} \neq 0$, 则由(8.3.2)和(8.3.3)知, $v_j(j \in E_{a_0})$ 是 $(p_{ij}, i, j \in E_{a_0})$ 的过份测度而非调和测度. 于是,由 $a_0 \in \mathscr{A}$ 及引理(8.2.3)知

$$v_j = +\infty \quad (j \in E_{a_0}) \tag{8.3.4}$$

但这与 $v_j(j \in E)$ 的有限性矛盾. 所以 $v_{i_0} \neq 0$ 是不可能的. 由 $i_0 \in E_{00}$ 的任意性,立得 (i). 定理证毕.

定理 8.3.2. P 的有限正过份测度存在的充要条件是 P 是无桥链.

证. 由定理 8.3.1 知,只需证明条件的充分性.

设 P 是无桥链,于是有

$$p_{ij} = 0 \quad (i \in E_a, j \in E_{a'}, a, a' \in \{0\} \cup \mathscr{A}, a \neq a') \tag{8.3.5}$$

由引理 8.2.1 和引理 8.2.2 知,对任一 $a \in \{0\} \cup \mathscr{A}$, 有 $v_j(j \in E_a)$ 存在,使

$$0 < v_j < +\infty, \quad v_j \geqslant \sum_{k \in E_a} v_k p_{kj} \quad (j \in E_a) \tag{8.3.6}$$

由 (8.3.5) 和 (8.3.6) 得

$$0 < v_j < +\infty, \quad v_j \geqslant \sum_{k \in E} v_k p_{kj} \quad (j \in E) \tag{8.3.7}$$

所以, $v_j(j \in E)$ 是 P 的一个有限正过份测度. 定理证毕.

定理 8.3.3. 存在如下性质的 P 的有限过份测度 $v_j(j \in E)$:

(i) $v_j = 0 \quad (j \in E_{00})$ (8.3.8)

(ii) $v_j(j \in E_1)$ 是 P_1 的有限正过份测度.

证. 由引理 8.2.4, 定理 8.3.1 和定理 8.3.2 立得本定理.

§8.4. 第二组引理

由于 P_1 是无桥链,所以由定理 8.3.2 知, P_1 的有限正过份测度存在. 设 $\alpha_j(j \in E_1)$ 是 P_1 的一个有限正过份测度.

令

$$\tilde{p}_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} p_{ji} \quad (i, j \in E_1) \tag{8.4.1}$$

$$\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij}, i, j \in E_1) \tag{8.4.2}$$

引理 8.4.1. $v_j(j \in E)$ 是 P 的有限过份(有限调和)测度的充要条件是下列两条同时成立:

(i) $v_j = 0 \quad (j \in E_{00})$. (8.4.3)

(ii) $\dfrac{v_j}{\alpha_j}(j \in E_1)$ 是 $\tilde{P}$ 的有限过份(有限调和)函数.

证．由定理 8.3.3. 和 $\tilde{P}$ 的定义立得我们的定理．

令

$$\begin{cases} {}_ip_{ij}^{(1)} = p_{ij} \quad (i,\ j\in E_1,\ i \neq j) \\ {}_ip_{ij}^{(n+1)} = \sum\limits_{k\in E_1\setminus\{i\}} {}_ip_{ik}^{(n)} p_{kj} \ (n=1,2,\cdots;\ i,\ j\in E_1,\ i\neq j) \end{cases} \tag{8.4.4}$$

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 \quad (i,\ j\in E_1,\ i=j) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} {}_ip_{ij}^{(n)} \quad (i,\ j\in E_1,\ i\neq j) \end{cases} \tag{8.4.5}$$

$$\begin{cases} {}_j\tilde{p}_{ij}^{(1)} = \tilde{p}_{ij} \quad (i,\ j\in E_1,\ i \neq j) \\ {}_j\tilde{p}_{ij}^{(n+1)} = \sum\limits_{k\in E_1\setminus\{j\}} \tilde{p}_{ik} {}_j\tilde{p}_{kj}^{(n)} (n=1,2,\cdots;\ i,\ j\in E_1,\ i\neq j) \end{cases} \tag{8.4.6}$$

$$\tilde{f}_{ij}^{*} = \begin{cases} 1 \quad (i,\ j\in E,\ i=j) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} {}_j\tilde{p}_{ij}^{(n)} \quad (n=1,2,\cdots;\ i,\ j\in E_1,\ i\neq j) \end{cases} \tag{8.4.7}$$

易验证

$$\tilde{f}_{ij}^{*} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} e_{ji} \quad (i,\ j\in E_1) \tag{8.4.8}$$

定义 8.4.1. 定义在 E_1 上的非负函数 $L_i(i\in E_1)$ 叫做关于 (α, P_1) 是标准的，如果

$$0 < \sum_{j\in E_1} e_{ij}L_j < +\infty \quad (i\in E_1) \tag{8.4.9}$$

$$\sum_{j\in E_1} \alpha_j L_j < +\infty \tag{8.4.10}$$

引理 8.4.2. 关于 (α, P_1) 标准的函数 $L_i(i\in E_1)$ 存在．

证．由定理 7.4.5 知，关于 $\tilde{P}$ 的标准测度 $\gamma_i(i\in E_1)$ 存在，于是

$$0 < \sum_{j\in E_1} \gamma_j \tilde{f}_{ji}^{*} < +\infty \quad (i\in E_1) \tag{8.4.11}$$

令

$$L_j = \frac{\gamma_j}{\alpha_j} \quad (j\in E_1) \tag{8.4.12}$$

易验证 $L_j(j\in E_1)$ 是关于 (α, P_1) 的标准函数．引理证毕．

定义 8.4.2. 设$v_j(j\in E)$是P的一个有限过份测度,$\beta_j(j\in E_1)$是E_1上的一个非负函数. 若

$$\sum_{j\in E_1} v_j\beta_j < +\infty \tag{8.4.13}$$

则说 $v_j(j\in E)$ β–有限.

引理 8.4.3. 设 $v_j(j\in E)$ 是 P 的一个有限过份测度，则存在关于(α, P_1)的标准函数 $L_i(i\in E_1)$ 使 $v_j(j\in E)$ L–有限.

证. 由引理 8.4.2 知，关于 (α, P_1) 的标准函数存在，设$L_j^{(1)}(j\in E_1)$是一个关于(α, P_1)标准函数,令

$$L_j=\begin{cases}L_j^{(1)} & 如 \quad v_j=0\\ \min(2^{-(j+1)}v_j^{-1},\ L_j^{(1)}) & 如 \quad v_j>0\end{cases} \tag{8.4.14}$$

易验证$L_j(j\in E_1)$是关于(α,P_1)的标准函数且$v_j(j\in E)L$–有限.

引理 8.4.4. 若 $L_j(j\in E_1)$ 是关于(α, P_1)的标准函数，则$\alpha_jL_j(j\in E_1)$ 是关于 $\tilde{P}$ 的标准测度.

证. 注意(8.4.8)立得我们的引理.

§ 8.5. 流入边界

设 $L_i(i\in E_1)$ 为一个关于(α, P)的标准函数. 于是由引理 8.4.4 知,$\alpha_jL_j(j\in E_1)$是关于$\tilde{P}$的标准测度. 以$K_{\tilde{P}}(i,j)$, $d_{\tilde{P}}(i,j)$, B_{P_1} 等分别表示按 § 7.7 中的方法定义 $\tilde{P}$ 的流出边界(关于$\tilde{P}$的标准测度选为$\alpha_iL_i(i\in E_1)$)时所引用的$K(i,j)$, $d(i,j)$, B等符号. 令

$$E_{01}=E_0\backslash E_{00} \tag{8.5.1}$$

$$\hat{d}(i,j)=\begin{cases}d_{\tilde{P}}(i,j), & i,j\in E_1\\ 0, & i\in E_{00},\ j\in E_{00}\\ 1, & i\in E_{00},\ j\in E_1 \text{ 或 } i\in E_1,\ j\in E_{00}\end{cases} \tag{8.5.2}$$

由(8.5.2)和 § 7.7 易证，状态空间E在引入距离$\hat{d}$后构成一个距离空间. 倘若把 E_∞ 中的每个状态等同视之并把每个常返类 $E_a(a\in\mathscr{A})$ 的每个状态等同视之，将这个空间按距离 $\hat{d}$ 完备化，得到一个完备距离空间 $\hat{E}$, $\partial\hat{E}=\hat{E}\backslash E_{01}$ 叫做P的 Martin 流入边

界. 显然，$\hat{E} \supset E_{\bar{p}}^*$，$\partial\hat{E} \supset \partial E_{\bar{p}}$.

§8.6. 流入空间和过份测度的表达式

令 $\hat{B} = B_{\bar{p}}$，并把 $\hat{B}$ 叫做 P 的流入空间.

令

$$\hat{K}(i, \xi) = \begin{cases} \alpha_i K_{\bar{p}}(i, \xi), & i \in E_1, \ \xi \in E_{01} \cup B_{\bar{p}} \\ 0 & i \in E_{00}, \ \xi \in E_{01} \cup B_{\bar{p}} \end{cases} \tag{8.6.1}$$

定理 8.6.1. P 的任一 L-有限过份测度 $v_j (j \in E)$ 可唯一地表示成如下形式

$$v_j = \int_{E_{01} \cup \hat{B}} \hat{K}(j, \xi) \mu(d\xi) \quad (j \in E) \tag{8.6.2}$$

其中 μ 是 $E_{01} \cup \hat{B}$ 上的有限测度. 反之亦然. 这个测度成为调和的，充要条件是 $\mu(E_{01}) = 0$.

证. 由定理 7.11.1，(8.6.1)以及引理 7.4.1，立得我们的定理.

第四篇　齐次可列马尔可夫过程

第九章　最小 Q 过程

§9.1. 引　　言

设 $X(\omega)=\{x(t,\omega),t<\sigma(\omega)\}$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的齐次可列马尔可夫过程. 其最小状态空间是可列集 $E=(1,2,\cdots)$, 其转移概率矩阵 $(p_{ij}(t),t\geqslant 0,i,j\in E)$ 是标准的, 且其 Q 矩阵满足关系:

$$0<q_i\equiv -q_{ii}<+\infty,\quad \sum_{j\in E}q_{ij}=0\quad (i\in E)\qquad (9.1.1)$$

在上述假定下, 不影响转移概率矩阵, 我们仍假定 $X(\omega)$ 具有 §1.1 中提出的性质 (D).

熟知, 以 Q 为密度矩阵的马尔可夫过程未必一个, 我们把它们泛称为 Q 过程, 把第一次无穷 τ 以前的那一部分 $\{x(t,\omega),t<\tau(\omega)\}$ 叫做最小 Q 过程.

本章的目的是研究最小 Q 过程的转移概率, 第一次到达时间的分布和矩, 积分型泛函的分布和矩以及状态的分类等问题.

我们假定 $q_i>0$ 及 $\sum_{j\in E}q_{ij}=0$ $(i\in E)$ 只是为了论证的方便, 其实对于 $q_i\geqslant 0$ $(i\in E)$ 及 $\sum_{j\in E}q_{ij}\leqslant 0$ 的一般情况我们仍能得到相应的结果.

§9.2. 转 移 概 率

本节的结果不是新的, 但陈述的形式与旧的不同. 为引用方便, 下面简略述及.

设 A 为 E 的非空子集. 令

$$p_{iA}^{\min}(t)=P(x(t)\in A,t<\tau\,|\,x_0=i)\qquad (9.2.1)$$

$$p_{iA}^{\min}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_{iA}^{\min}(t)\, dt \quad \lambda \geqslant 0 \tag{9.2.2}$$

定理 9.2.1. $\{p_{iA}^{\min}(\lambda), i \in E\}$ 是第一型围壹方程

$$x_i = \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} x_k + \frac{\delta_{iA}}{\lambda + q_i} \quad (i \in E) \tag{9.2.3}$$

的最小非负解.

证. 由 [1, II, § 17] 易完成本定理的证明.

§ 9.3. 第一次到达时间的分布和矩

设 $\tau^{(n)}(\omega)$ 是 $x(\cdot, \omega)$ 的第 n 次跳跃时刻,即

$$\tau^{(0)}(\omega) \equiv 0 \tag{9.3.1}$$

$$\tau^{(n)}(\omega) = \inf(t: t > \tau^{(n-1)}(\omega)$$
$$x(t, \omega) = x(\tau^{(n-1)}(\omega), \omega) \tag{9.3.2}$$

令

$$\tau(\omega) = \text{V-}\lim_{n\to\infty} \tau^{(n)}(\omega) \tag{9.3.3}$$

是 $x(\cdot, \omega)$ 的第一次无穷.

引理 9.3.1. $\tau^{(1)}$ 与 $x_{\tau^{(1)}}$ 在 $x_0 = i\ (i \in E)$ 之下条件独立,从而对于 $j \neq i$, $q_{ij} \neq 0$ 有

$$P(\tau^{(1)} \leqslant t | x_0 = i, x_{\tau^{(1)}} = j) = P(\tau^{(1)} \leqslant t | x_0 = i)$$
$$= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-q_i t}, & t \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.3.4}$$

上述引理的证明见 [11, § 2].

设 $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ 是 $\mathscr{F}$ 的两个子 σ-代数, $\Delta \in \mathscr{F}$, $P(\Delta) \neq 0$, 且 $\mathscr{F}_1$ 与 $\mathscr{F}_2$ 关于Δ条件独立,即,若 $\Lambda_1 \in \mathscr{F}_1$, $\Lambda_2 \in \mathscr{F}_2$, 则

$$P(\Lambda_1\Lambda_2 | \Delta) = P(\Lambda_1|\Delta)P(\Lambda_2|\Delta) \tag{9.3.5}$$

引理 9.3.2. 设非负函数 X, Y 分别关于 $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ 可测, Λ_1, $\Lambda_1' \in \mathscr{F}_1$, Λ_2, $\Lambda_2' \in \mathscr{F}_2$, $P(\Lambda_1'\Delta\Lambda_2') \neq 0$, 则

$$P(X + Y \leqslant t, \Lambda_1, \Lambda_2 | \Lambda_1'\Delta\Lambda_2')$$
$$= \int_{-0}^{t} P(Y \leqslant t - u, \Lambda_2 | \Lambda_1'\Delta\Lambda_2') dP(X \leqslant u, \Lambda_1 | \Lambda_1'\Delta\Lambda_2') \tag{9.3.6}$$

证. 分下列三步.

(1) 试证：A_1 与 A_2 关于 $A_1'\Delta$ 条件独立，即

$$P(A_1A_2|A_1'\Delta)=P(A_1|A_1'\Delta)P(A_2|A_1'\Delta) \qquad (9.3.7)$$

实因

$$P(A_1A_2|A_1'\Delta)=\frac{P(A_1A_2A_1'\Delta)}{P(A_1'\Delta)}=\frac{P(A_1A_1'|\Delta A_2)P(\Delta A_2)}{P(\Delta)P(A_1'|\Delta)}$$

$$=\frac{P(A_1A_1'|\Delta A_2)}{P(A_1'|\Delta)}\cdot\frac{P(\Delta A_2)}{P(\Delta)}=P(A_1|A_1'\Delta)P(A_2|\Delta)$$

$$=P(A_1|A_1'\Delta)P(A_2|A_1'\Delta) \qquad (9.3.8)$$

于是(9.3.7)真.

(2) 试证：A_1 与 A_2 关于 $A_1'\Delta A_2'$ 条件独立，即

$$P(A_1A_2|A_1'\Delta A_2')=P(A_1|A_1'\Delta A_2')P(A_2|A_1'\Delta A_2') \qquad (9.3.9)$$

重复应用(1)的结论两次，即可得(2)；

(3) 试证(9.3.6)真.

(A) 设

$$P(A_1A_1'\Delta A_2A_2')=0 \qquad (9.3.10)$$

这时

$$P(X+Y\leqslant t,\ A_1,\ A_2|A_1'\Delta A_2')=0 \qquad (9.3.11)$$

由(2)和(9.3.10)得

$$P(A_1|A_1'\Delta A_2')P(A_2|A_1'\Delta A_2')=P(A_1A_2|A_1'\Delta A_2')=0 \quad (9.3.12)$$

于是有

$$P(A_1|A_1'\Delta A_2')=0 \qquad (9.3.13)$$

或

$$P(A_2|A_1'\Delta A_2')=0 \qquad (9.3.14)$$

若(9.3.13)成立，则对任一 $u\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$P(X\leqslant u,A_1|A_1'\Delta A_2')=0 \qquad (9.3.15)$$

于是

$$\int_{-0}^{t}P(Y\leqslant t-u,\ A_2|A_1'\Delta A_2')dP(X\leqslant u,\ A_1|A_1'\Delta A_2')=0 \qquad (9.3.16)$$

若(9.3.14)成立，则对任意的 $t,u\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$P(Y\leqslant t-u,A_2|A_1'\Delta A_2')=0 \qquad (9.3.17)$$

于是(9.3.16)亦成立. 由(9.3.11)和(9.3.16)知(9.3.6)真;

(B) 设

$$P(\Lambda_1\Lambda_2\Delta\Lambda_1'\Lambda_2') \neq 0 \tag{9.3.18}$$

由(2)得

$$\begin{aligned}
&P(X+Y\leqslant t,\Lambda_1,\Lambda_2|\Lambda_1'\Delta\Lambda_2')\\
&\quad= P(\Lambda_1\Lambda_2|\Lambda_1'\Delta\Lambda_2')P(X+Y\leqslant t|\Lambda_1\Lambda_1'\Delta\Lambda_2\Lambda_2')\\
&\quad= P(\Lambda_1|\Lambda_1'\Delta\Lambda_2')P(\Lambda_2|\Lambda_1'\Delta\Lambda_2')\\
&\qquad\times\int_{-0}^{t} p(Y\leqslant t-u|\Lambda_1\Lambda_1'\Delta\Lambda_2\Lambda_2')dp(\Lambda_1\Lambda_1'\Delta\Lambda_2\Lambda_2')\\
&\quad= \int_{-0}^{t} P(\Lambda_2|\Lambda_1'\Delta\Lambda_2')P(Y\\
&\quad\leqslant t-u|\Lambda_1'\Delta\Lambda_2\Lambda_2')dP(\Lambda_1|\Lambda_1'\Delta\Lambda_2')P(X\leqslant u|\Lambda_1\Lambda_1'\Delta\Lambda_2')\\
&\quad= \int_{-0}^{t} P(Y\leqslant t-u,\ \Lambda_2|\Lambda_1'\Delta\Lambda_2')dP(X\leqslant u,\Lambda_1|\Lambda_1'\Delta\Lambda_2')
\end{aligned} \tag{9.3.19}$$

于是(9.3.6)真.

引理证毕.

设 $F_i(t)$ $(i=1,2)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的非负不减右连续函数,对 $t<0$ 有 $F_i(t)=0$ $(i=1,2)$, 且

$$F_i(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}F_i(t)\leqslant 1 \quad (i=1,2) \quad , \tag{9.3.20}$$

令

$$F(t)=\int_{-0}^{t}F_1(t-u)dF_2(u) \quad (t\geqslant 0) \tag{9.3.21}$$

$$\varphi_i(\lambda)=\int_{-0}^{\infty}e^{-\lambda t}dF_i(t) \quad (i=1,2,\ \lambda\geqslant 0) \tag{9.3.22}$$

$$\varphi(\lambda)=\int_{-0}^{\infty}e^{-\lambda t}dF(t) \quad (\lambda\geqslant 0) \tag{9.3.23}$$

$$m_i^{(p)}=\int_{-0}^{\infty}t^p dF_i(t) \quad (i=1,2,\ p=0,1,\cdots) \tag{9.3.24}$$

$$m^{(p)}=\int_{-0}^{\infty}t^p dF(t) \quad (p=0,1,\cdots) \tag{9.3.25}$$

容易证明下列两个引理.

引理 9.3.3.

$$\varphi(\lambda)=\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda) \tag{9.3.26}$$

引理 9.3.4.

$$m^{(p)}=\sum_{l=0}^{p} C_p^l m_1^{(l)} m_2^{(p-l)} \quad (p=0,1,\cdots) \tag{9.3.27}$$

设 A, H 为 E 的子集，且 $A \neq \varnothing$. 令

$$\sigma_A(\omega)=\begin{cases}\inf(t:\tau^{(1)}(\omega)\leqslant t<\tau(\omega),\ x_t(\omega)\in A), \\ \qquad \text{如括号中的集非空} \\ +\infty, \quad \text{相反的情形}\end{cases} \tag{9.3.28}$$

$${}_H\sigma_A(\omega)=\begin{cases}\sigma_A(\omega), & \text{如 } \sigma_A(\omega)\leqslant\sigma_H(\omega) \\ +\infty, & \text{相反的情形}\end{cases} \tag{9.3.29}$$

$${}_Hf_{iA}^{(n)}(t)=P({}_H\sigma_A(\omega)\leqslant t,$$

$${}_H\sigma_A(\omega)=\tau^{(n)}(\omega)\,|\,x_0=i) \quad (n=1,2,\cdots) \tag{9.3.30}$$

$${}_Hf_{iA}(t)=P({}_H\sigma_A(\omega)\leqslant t\,|\,x_0=i) \tag{9.3.31}$$

$${}_H\Phi_{iA}^{(n)}(\lambda)=\int_{-0}^{\infty} e^{-\lambda t} d_H f_{iA}^{(n)}(t) \quad (\lambda\geqslant 0) \tag{9.3.32}$$

$${}_H\Phi_{iA}(\lambda)=\int_{-0}^{\infty} e^{-\lambda t} d_H f_{iA}(t) \quad (\lambda\geqslant 0) \tag{9.3.33}$$

$${}_Hm_{iA}^{(n,p)}=\int_{-0}^{\infty} t^p d_H f_{iA}^{(n)}(t) \quad (p=0,1,\cdots) \tag{9.3.34}$$

$${}_Hm_{iA}^{(p)}=\int_{-0}^{\infty} t^p d_H f_{iA}(t) \quad (p=0,1,\cdots) \tag{9.3.35}$$

$${}_Hf_{iA}^{*}={}_H\Phi_{iA}(0)={}_Hm_{iA}^{(0)}=P({}_H\sigma_A(\omega)<+\infty\,|\,x_0=i) \tag{9.3.36}$$

引理 9.3.5.

$$P(x_{\tau^{(1)}}=j,\ \tau^{(1)}\leqslant t\,|\,x_0=i)=\frac{q_{ij}}{q_i}P(\tau^{(1)}\leqslant t\,|\,x_0=i) \quad (j\neq i) \tag{9.3.37}$$

证. 当 $q_{ij}=0$ 时，(9.3.37) 显见成立，因这时它的左右两端都等于 0；当 $q_{ij}\neq 0$ 时，由引理 9.3.1 立得 (9.3.37). 引理证毕.

引理 9.3.6.

$$P(x_{\tau^{(1)}}=j,\ x_{\tau^{(\nu)}}\notin A\cup H,\ 1<\nu<n+1,$$

$$x_{\tau^{(n+1)}}\in A,\ \tau^{(n+1)}\leqslant t\,|\,x_0=i)$$

$$= \frac{q_{ij}}{q_i}\int_{-0}^{t} {}_Hf_{jA}^{(n)}(t-u)dp(\tau^{(1)} \leqslant u \mid x_0 = i) \quad (j \neq i) \quad (9.3.38)$$

证．当 $q_{ij} = 0$ 时，(9.3.38) 显见成立．因为这时它的左右两端都等于 0；当 $q_{ij} \neq 0$ 时，由引理 9.3.1 和引理 9.3.2，齐次性及强马氏性得

$$p(x_{\tau^{(1)}} = j,\ x_{\tau^{(\nu)}} \notin A \cup H,\ 1 < \nu < n+1,$$
$$x_{\tau^{(n+1)}} \in A,\ \tau^{(n+1)} \leqslant t \mid x_0 = i)$$
$$= \frac{q_{ij}}{q_i} P(x_{\tau^{(\nu)}} \notin A \cup H,\ 1 < \nu < n+1,\ x_{\tau^{(n+1)}} \in A,$$
$$(\tau^{(n+1)} - \tau^{(1)}) + \tau^{(1)} \leqslant t \mid x_0 = i,\ x_{\tau^{(1)}} = j)$$
$$= \frac{q_{ij}}{q_i}\int_{-0}^{t} P(x_{\tau^{(\nu)}} \notin A \cup H,\ 1 < \nu < n+1,\ x_{\tau^{(n+1)}} \in A,$$
$$\tau^{(n+1)} - \tau^{(1)} \leqslant t - u \mid x_0 = i,\ x_{\tau^{(1)}} = j)$$
$$\times\, dP(\tau^{(1)} \leqslant u \mid x_0 = i,\ x_{\tau^{(1)}} = j)$$
$$= \frac{q_{ij}}{q_i}\int_{-0}^{t} P(x_{\tau^{(\nu)}} \notin A \cup H,\ 0 < \nu < n,\ x_{\tau^{(n)}} \in A,$$
$$\tau^{(n)} \leqslant t - u \mid x_0 = j) \cdot dP(\tau^{(1)} \leqslant u \mid x_0 = i)$$
$$= \frac{q_{ij}}{q_i}\int_{-0}^{t} P({}_H\sigma_A \leqslant t - u,$$
$${}_H\sigma_A = \tau^{(n)} \mid x_0 = j) dP(\tau^{(1)} \leqslant u \mid x_0 = i)$$
$$= \frac{q_{ij}}{q_i}\int_{-0}^{t} {}_Hf_{jA}^{(n)}(t-u) dP(\tau^{(1)} \leqslant u \mid x_0 = i) \qquad (9.3.39)$$

于是引理得证．

引理 9.3.7. ${}_Hf_{iA}^{(n)}(t)$ 由次之递推公式唯一决定：

$$\left.\begin{aligned} {}_Hf_{iA}^{(1)}(t) &= \sum_{j \in A\setminus\{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i} P(\tau^{(1)} \leqslant t \mid x_0 = i) \quad (i \in E) \\ {}_Hf_{iA}^{(n+1)}(t) &= \sum_{j \notin \{i\}\cup A \cup H} \frac{q_{ij}}{q_i}\int_{-0}^{t} {}_Hf_{jA}^{(n)}(t-u) dP(\tau^{(1)} \\ &\qquad \leqslant u \mid x_0 = i) \quad (n \geqslant 1,\ i \in E) \end{aligned}\right\} \quad (9.3.40)$$

证．由引理 9.3.5 得

$${}_Hf_{iA}^{(1)}(t) = P({}_H\sigma_A \leqslant t, {}_H\sigma_A = \tau^{(1)} \mid x_0 = i)$$

$$= P(x_{\tau^{(1)}} \in A,\ \tau^{(1)} \leqslant t \mid x_0 = i)$$

$$= \sum_{j \in A \setminus \{i\}} P(x_{\tau^{(1)}} = j,\ \tau^{(1)} \leqslant t \mid x_0 = i)$$

$$= \sum_{j \in A \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i} P(\tau^{(1)} \leqslant t \mid x_0 = i) \tag{9.3.41}$$

由引理 9.3.6 得

$$\begin{aligned} {}_H f_{iA}^{(n+1)}(t) &= P({}_H\sigma_A \leqslant t,\ {}_H\sigma_A = \tau^{(n+1)} \mid x_0 = i) \\ &= P(x_{\tau^{(\nu)}} \notin A \cup H, 0 < \nu < n+1, \\ &\qquad x_{\tau^{(n+1)}} \in A,\ \tau^{(n+1)} \leqslant t \mid x_0 = i) \\ &= \sum_{j \notin \{i\} \cup A \cup H} P(x_{\tau^{(1)}} = j,\ x_{\tau^{(\nu)}} \notin A \cup H, \\ &\qquad 1 < \nu < n+1,\ x_{\tau^{(n+1)}} \in A,\ \tau^{(n+1)} \leqslant t \mid x_0 = i) \\ &= \sum_{j \notin \{i\} \cup A \cup H} \frac{q_{ij}}{q_i} \int_{-0}^{t} {}_H f_{jA}^{(n)}(t-u) dP(\tau^{(1)} \leqslant u \mid x_0 = i) \end{aligned} \tag{9.3.42}$$

于是引理得证.

引理 9.3.8. ${}_H\Phi_{iA}^{(n)}(\lambda)$ 由次之递推公式唯一决定:

$$\left.\begin{aligned} {}_H\Phi_{iA}^{(1)}(\lambda) &= \sum_{j \in A \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{\lambda + q_i} \quad (i \in E) \\ {}_H\Phi_{iA}^{(n+1)}(\lambda) &= \sum_{j \notin \{i\} \cup A \cup H} \frac{q_{ij}}{\lambda + q_i}\ {}_H\Phi_{jA}^{(n)}(\lambda) \quad (n \geqslant 1, i \in E) \end{aligned}\right\} \tag{9.3.43}$$

证. 对 (9.3.40) 的两端分别取 Leplace-Stieltjes 变换,并注意引理 9.3.1 和引理 9.3.3 立得我们的引理.

引理 9.3.9. ${}_H m_{iA}^{(n,p)}$ 由次之递推公式唯一决定:

$$\left.\begin{aligned} {}_H m_{iA}^{(1,p)} &= p!\left(\frac{1}{q_i}\right)^p \sum_{j \in A \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i} \quad (i \in E) \\ {}_H m_{iA}^{(n+1,p)} &= \sum_{l=0}^{p} C_p^l l!\left(\frac{1}{q_i}\right)^l \sum_{j \notin \{i\} \cup A \cup H} \frac{q_{ij}}{q_i}\ {}_H m_{jA}^{(n,p-l)} \\ &\quad (n \geqslant 1, i \in E) \end{aligned}\right\} \tag{9.3.44}$$

证. 由引理 9.3.1, 引理 9.3.4 以及引理 9.3.7 立得我们的引理.

引理 9.3.10.

$$ {}_{H}f_{iA}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}{}_{H}f_{iA}^{(n)}(t) \tag{9.3.45}$$

$$ {}_{H}\Phi_{iA}(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}{}_{H}\Phi_{iA}^{(n)}(\lambda) \tag{9.3.46}$$

$$ {}_{H}m_{Ai}^{(p)}=\sum_{n=1}^{\infty}{}_{H}m_{iA}^{(n,p)} \tag{9.3.47}$$

证. 由 (9.3.30)—(9.3.35) 立得我们的引理.

定理 9.3.1. $\{{}_{H}\Phi_{iA}(\lambda),\ i\in E\}$ 是拟规格方程

$$x_i=\sum_{j\notin\{i\}\cup A\cup H}\frac{q_{ij}}{\lambda+q_i}x_j+\sum_{j\in A\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{\lambda+q_i}\quad(i\in E) \tag{9.3.48}$$

的最小非负解.

证. 由 (9.3.46), 引理 9.3.8 以及系 3.2.3 立得我们的定理.

定理 9.3.2. $\{{}_{H}f_{iA}^{*},\ i\in E\}$ 是拟规格方程

$$x_i=\sum_{j\notin\{i\}\cup A\cup H}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j+\sum_{j\in A\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}\quad(i\in E) \tag{9.3.49}$$

的最小非负解.

证. 本定理乃定理 9.3.1 的在 $\lambda=0$ 下之特例.

定理 9.3.3. 对于 $p\geqslant 1$, $\{{}_{H}m_{iA}^{(p)},\ i\in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$x_i=\sum_{j\notin\{i\}\cup A\cup H}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j+\frac{p}{q_i}{}_{H}m_{iA}^{(p-1)}\quad(i\in E) \tag{9.3.50}$$

的最小非非负解.

证. 由 (9.3.47), 引理 9.3.9 以及系 3.2.2 知, $\{{}_{H}m_{iA}^{(p)},\ i\in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$x_i=\sum_{j\notin\{i\}\cup A\cup H}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j+\sum_{l=1}^{p}C_p^l\,l!\left(\frac{1}{q_i}\right)^l\sum_{j\notin\{i\}\cup A\cup H}\frac{q_{ij}}{q_i}{}_{H}m_{jA}^{(p-l)}$$
$$+\,p!\left(\frac{1}{q_i}\right)^p\sum_{j\in A\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}\quad(i\in E) \tag{9.3.51}$$

的最小非负解. 从而

$$
{}_H m_{iA}^{(p)} = \sum_{l=0}^{p} C_p^l l! \left(\frac{1}{q_i}\right)^l \sum_{j \in \{i\} \cup A \cup H} \frac{q_{ij}}{q_i} {}_H m_{jA}^{(p-l)}
$$

$$
+ p! \left(\frac{1}{q_i}\right)^p \sum_{j \in A \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i} \quad (p = 1, 2, \cdots, i \in E) \quad (9.3.52)
$$

于是

$$
\sum_{l=1}^{p} C_p^l l! \left(\frac{1}{q_i}\right)^l \sum_{j \in \{i\} \cup A \cup H} \frac{q_{ij}}{q_i} {}_H m_{jA}^{(p-l)} + p! \left(\frac{1}{q_i}\right)^p \sum_{j \in A \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i}
$$

$$
= \frac{p}{q_i} \left(\sum_{l=1}^{p} C_{p-1}^{l-1} (l-1)! \left(\frac{1}{q_i}\right)^{l-1} \sum_{j \in \{i\} \cup A \cup H} \frac{q_{ij}}{q_i} {}_H m_{jA}^{((p-1)-(l-1))} \right.
$$

$$
\left. + (p-1)! \left(\frac{1}{q_i}\right)^{p-1} \sum_{j \in A \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i} \right)
$$

$$
= \frac{p}{q_i} \left(\sum_{l=0}^{p-1} C_{p-1}^l l! \left(\frac{1}{q_i}\right)^l \sum_{j \in \{i\} \cup A \cup H} \frac{q_{ij}}{q_i} {}_H m_{jA}^{(p-1-l)} \right.
$$

$$
\left. + (p-1)! \left(\frac{1}{q_i}\right)^{p-1} \sum_{j \in A \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i} \right) = \frac{p}{q_i} {}_H m_{iA}^{(p-1)} \quad (9.3.53)
$$

定理证毕.

定理 9.3.4. 若

$$
{}_H m_{iA} \leqslant c_H f_{iA}^* \quad (i \in E) \quad (9.3.54)
$$

则

$$
{}_H m_{iA}^{(p)} \leqslant p! c^p {}_H f_{iA}^* \quad (p \geqslant 1, i \in E) \quad (9.3.55)
$$

证. 与定理 6.3.4 的证明类似.

§ 9.4. 正常返判别准则

令

$$
r_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ \dfrac{q_{ij}}{q_i}, & i \neq j \end{cases} \quad (9.4.1)
$$

$$
R = (r_{ij}, i, j \in E) \quad (9.4.2)
$$

设 s 是 E 的一元,令

$$
D(s) = (i : s \underset{R}{\rightsquigarrow} i) \setminus \{s\} \quad (9.4.3)
$$

定义 9.4.1. 若

$$f_{ss}^{*}=1 \tag{9.4.4}$$

则称 s 为最小 Q 过程 $\{x(t,\omega),\ t<\tau(\omega)\}$ 的常返状态；若 s 是最小 Q 过程 $\{x(t,\omega),\ t<\tau(\omega)\}$ 的常返状态，且

$$m_{ss}<+\infty \tag{9.4.5}$$

则称 s 为 $\{x(t,\omega),\ t<\tau(\omega)\}$ 的正常返状态.

引理 9.4.1. 若 s 是 $\{x(t,\omega),\ t<\tau(\omega)\}$ 的常返状态，则 $\{m_{is},\ i\in D(s)\}$ 是第一型囿壹方程

$$x_i=\sum_{j\in D(s)\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j+\frac{1}{q_i}\quad(i\in D(s)) \tag{9.4.6}$$

的最小非负解，且

$$m_{ss}=\sum_{j\in D(s)}\frac{q_{sj}}{q_s}m_{js}+\frac{1}{q_s} \tag{9.4.7}$$

证. 因 s 是 $\{x(t,\omega),\ t<\tau(\omega)\}$ 的常返状态，故

$$f_{ss}^{*}=1 \tag{9.4.8}$$

由 (9.4.8)，定理 9.3.2 和定理 5.6.2 知

$$f_{is}^{*}=1\quad(i\in D(s)) \tag{9.4.9}$$

由 (9.4.8)，(9.4.9)，定理 9.3.3 以及系 3.4.1 立得我们的引理.

在 [17] 中给出了最小 Q 过程的状态的常返和正常返判别准则. 在一些特殊情况下，利用上节的结果可把 f_{ss}^{*} 和 m_{ss}^{*} 实际计算出来，以判定状态 s 是否常返和正常返，关于此，不拟述及. 今只给出一个新的“正常返判别准则”.

定理 9.4.1. 若 s 是最小 Q 过程 $\{x(t,\omega),\ t<\tau(\omega)\}$ 的常返状态，则 s 是其正常返状态的充要条件是方程

$$x_i\geqslant\sum_{j\in D(s)\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j+\frac{1}{q_i}\quad(i\in D(s)) \tag{9.4.10}$$

有满足条件

$$\sum_{j\in D(s)}\frac{q_{sj}}{q_s}x_j<+\infty \tag{9.4.11}$$

的非负解 $x_i(i\in D(s))$.

证．由引理 9.4.1 及系 3.3.2 立得我们的定理．

§9.5. 积分型泛函的分布和矩

设 A 是 E 的子集(可以是空的，当它是空集时可从各记号中省去)，$H_N=(N+1, N+2, \cdots)$．令

$$\tau_A(\omega)=\begin{cases}\inf(t:\tau^{(1)}(\omega)<t<\tau(\omega),\ x(t,\omega)\in A)\\ \tau(\omega),\ \text{如上集合空}\end{cases} \tag{9.5.1}$$

$$\tau_A^{(n)}(\omega)=\min(\tau^{(n)}(\omega),\ \tau_A(\omega)) \tag{9.5.2}$$

显然 $\tau_A^{(n)}(\omega)$ 和 $\tau_A(\omega)$ 是不依赖于将来的随机变量．

设 $v(i)\ (i\in E)$ 是 E 上非负有穷值函数，令

$$\xi_A^{(n)}(\omega)=\int_0^{\tau_A^{(n)}(\omega)} v(x(t,\omega))dt \tag{9.5.3}$$

$$\xi_A(\omega)=\int_0^{\tau_A(\omega)} v(x(t,\omega))dt \tag{9.5.4}$$

易证 $\xi_A^{(n)}(\omega)$ 和 $\xi_A(\omega)$ 是随机变量及以概率 1 有

$$\xi_A^{(n)}(\omega)\uparrow\xi_A(\omega)\quad(n\uparrow+\infty) \tag{9.5.5}$$

$$\xi_{A\cup H_N}(\omega)\uparrow\xi_A(\omega)\quad(N\uparrow+\infty) \tag{9.5.6}$$

令

$$F_{iA}^{(n)}(t)=P(\xi_A^{(n)}(\omega)\leqslant t\,|\,x_0=i) \tag{9.5.7}$$

$$F_{iA}(t)=P(\xi_A(\omega)\leqslant t\,|\,x_0=i) \tag{9.5.8}$$

$$\varphi_{iA}^{(n)}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dF_{iA}^{(n)}(t)\quad(\lambda>0) \tag{9.5.9}$$

$$\varphi_{iA}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dF_{iA}(t)\quad(\lambda>0) \tag{9.5.10}$$

$$\psi_{iA}^{(n)}(\lambda)=1-\varphi_{iA}^{(n)}(\lambda) \tag{9.5.11}$$

$$\psi_{iA}(\lambda)=1-\varphi_{iA}(\lambda) \tag{9.5.12}$$

$$T_{iA}^{(n,p)}=M\{[\xi_A^{(n)}(\omega)]^p\,|\,x_0=i\} \tag{9.5.13}$$

$$T_{iA}^{(p)}=M\{[\xi_A(\omega)]^p\,|\,x_0=i\} \tag{9.5.14}$$

这里 $p=0, 1, \cdots$．显然

$$T_{iA}^{(n,0)}=T_{iA}^{(0)}=1 \tag{9.5.15}$$

所以今后约定 $p=1, 2, \cdots$．

有时把 $T_{iA}^{(1)}$ 记为 T_{iA}. 上面已经说过，如 $A=\varnothing$，则诸记号中的 A 可以略去，如 $T_{i\varnothing}^{(p)}=T_i^{(p)}$.

由 (9.5.5) 和 (9.5.6) 得

$$\psi_{iA}^{(n)}(\lambda)\uparrow\psi_{iA}(\lambda)\quad(n\uparrow+\infty)\tag{9.5.16}$$

$$\psi_{iA\cup H_N}(\lambda)\uparrow\psi_{iA}(\lambda)\quad(N\uparrow+\infty)\tag{9.5.17}$$

$$T_{iA}^{(n,p)}\uparrow T_{iA}^{(p)}\quad(n\uparrow+\infty)\tag{9.5.18}$$

$$T_{iA\cup H_N}^{(p)}\uparrow T_{iA}^{(p)}\quad(N\uparrow+\infty)\tag{9.5.19}$$

令

$$\chi_n(\omega)=x(\tau^{(n)}(\omega),\omega)\tag{9.5.20}$$

$$\hat{\tau}_A(\omega)=\begin{cases}\inf(n:\chi_n(\omega)\in A,\ n\geqslant 1)\\ +\infty,\ \text{如上集合空.}\end{cases}\tag{9.5.21}$$

$$\hat{\tau}_A^{(n)}(\omega)=\min(n,\hat{\tau}_A(\omega))\tag{9.5.22}$$

$$\hat{\xi}_A(\omega)=\sum_{k=1}^{\hat{\tau}_A^{(n)}(\omega)}\frac{v(\chi_{k-1}(\omega))}{q_{\chi_{k-1}(\omega)}}\tag{9.5.23}$$

$$\hat{F}_{iA}^{(n)}(t)=p(\hat{\xi}_A(\omega)\leqslant t\,|\,x_0=i)\tag{9.5.24}$$

$$\hat{F}_{iA}(t)=p(\hat{\xi}_A(\omega)\leqslant t\,|\,x_0=i)\tag{9.5.25}$$

$$\hat{\varphi}_{iA}^{(n)}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dF_{iA}^{(n)}(t)\tag{9.5.26}$$

$$\hat{\varphi}_{iA}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dF_{iA}(t)\tag{9.5.27}$$

$$\hat{T}_{iA}^{(p)}=M\{[\hat{\xi}_A(\omega)]^p\,|\,x_0=i\}\quad(p=0,1,\cdots)\tag{9.5.28}$$

关于积分型泛函 $\xi_A(\omega)$（引入 $\xi_A^{(n)}(\omega)$ 的主要目的是为了研究 $\xi_A(\omega)$，特别是为了研究 $\xi(\omega)$）的分布和矩的研究始于王梓坤，他在 [18] 中对生灭过程完全解决了 $\xi_{H_N}(\omega)$ 和 $\xi(\omega)$ 的分布和矩的计算问题. 继而吴立德[19] 和杨超群[11]，分别对较一般和一般齐次可列马尔可夫过程研究了这个问题，得到了若干中间结果. 本章在他们工作的基础上并引用"非负线性方程组的最小非负解理论"完全解决了 $\xi_A(\omega)$ 的分布和矩的计算以及它们与 $\hat{\xi}_A(\omega)$ 的分布和矩的关系问题.

引理 9.5.1. $\psi_{iA}^{(n)}(\lambda)$ 由次之递推公式唯一决定:

$$\left.\begin{aligned}&\phi_{iA}^{(0)}(\lambda)\equiv 0 \quad (i\in E)\\&\phi_{iA}^{(n+1)}(\lambda)=\sum_{j\notin\{i\}\cup A}\frac{q_{ij}}{\lambda v(i)+q_i}\phi_{jA}^{(n)}(\lambda)+\frac{\lambda v(i)}{\lambda v(i)+q_i}\\&\qquad (n\geqslant 0,\ i\in E)\end{aligned}\right\}\quad(9.5.29)$$

证．由于(9.5.11)，只需证明$\varphi_{iA}^{(n)}(\lambda)$满足次之递推公式：

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_{iA}^{(0)}(\lambda)\equiv 1 \quad (i\in E)\\&\varphi_{iA}^{(n+1)}(\lambda)=\sum_{j\in\{i\}\cup A}\frac{q_{ij}}{\lambda v(i)+q_i}\varphi_{jA}^{(n)}(\lambda)\\&\qquad+\sum_{j\in A\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{\lambda v(i)+q_i}\quad(n\geqslant 0,\ i\in E)\end{aligned}\right\}\quad(9.5.30)$$

但这与[11，定理 2.1]的有关部分类似．不赘述．

引理 9.5.2. $T_{iA}^{(n,p)}$由次之递推公式唯一决定：

$$\left.\begin{aligned}&T_{iA}^{(1,p)}=p!\left[\frac{v(i)}{q_i}\right]^p \quad (i\in E)\\&T_{iA}^{(n+1,p)}=\sum_{l=0}^{p}C_p^l\sum_{j\notin\{i\}\cup A}\frac{q_{ij}}{q_i}l!\left[\frac{v(i)}{q_i}\right]^l T_{jA}^{(n,p-l)}\\&\qquad+\sum_{j\in A\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}p!\left[\frac{v(i)}{q_i}\right]^p\quad(n\geqslant 1,\ i\in E)\end{aligned}\right\}\quad(9.5.31)$$

证．与[11，定理 3.1]的证明类似．不赘述．

定理 9.5.1. $\{\phi_{iA}(\lambda),\ i\in E\}$是拟规格方程

$$x_i=\sum_{j\notin\{i\}\cup A}\frac{q_{ij}}{\lambda v(i)+q_i}x_j+\frac{\lambda v(i)}{\lambda v(i)+q_i}\quad(i\in E)\quad(9.5.32)$$

的最小非负解．

证．由引理 9.5.1 和定理 3.2.1 立得我们的定理．

定理 9.5.2. 对于$p\geqslant 1$，$\{T_{iA}^{(p)},\ i\in E\}$是第一型囿壹方程

$$x_i=\sum_{j\notin\{i\}\cup A}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j+\frac{pv(i)}{q_i}T_{iA}^{(p-1)}\quad(i\in E)\quad(9.5.33)$$

的最小非负解．

证．由(9.5.18)，引理 9.5.2 以及定理 3.2.2 并参考定理 9.3.3 的证明易完成我们的定理的证明．

定理 9.5.3. 若

$$T_{iA} \leqslant c < +\infty \quad (i \in E) \tag{9.5.34}$$

则

$$T_{iA}^{(p)} \leqslant p!c^p \quad (i \in E) \tag{9.5.35}$$

证. 与定理 6.7.6 的证明类似. 不赘述.

注 9.5.1. 定理 9.5.3 中的条件 (9.5.34) 在某些情况下是满足的，如，生灭过程[18]. 其实不难由 [18, 定理 4] 和 [20, 定理 5] 证明：当 E 可分解为有限个互不相交的原子核[20]之和时条件(9.5.34)就能成立.

定理 9.5.4. 若令

$$F_{iA}(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} F_{iA}(t) \tag{9.5.36}$$

$$\hat{F}_{iA}(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} \hat{F}_{iA}(t) \tag{9.5.37}$$

则

$$F_{iA}(+\infty) = \hat{F}_{iA}(+\infty) \tag{9.5.38}$$

证. 由 (9.5.30) 知

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_{iA}^{(0)}(\lambda) = 1 \quad (i \in E) \\ &\varphi_{iA}^{(n+1)}(\lambda) = \sum_{j \notin \{i\}\cup A} \frac{q_{ij}}{q_i}\left(1 + \frac{\lambda v(i)}{q_i}\right)^{-1} \varphi_{jA}^{(n)}(\lambda) \\ &\qquad\qquad + \sum_{j \in A\setminus\{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i}\left(1 + \frac{\lambda v(i)}{q_i}\right)^{-1} \\ &\qquad\qquad (n \geqslant 0,\ i \in E) \end{aligned}\right\} \tag{9.5.39}$$

由定理 6.7.1 知

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\varphi}_{iA}^{(0)}(\lambda) = 1 \quad (i \in E) \\ &\hat{\varphi}_{iA}^{(n+1)}(\lambda) = \sum_{j \notin \{i\}\cup A} \frac{q_{ij}}{q_i} e^{-\lambda v(i)/q_i} \varphi_{jA}^{(n)}(\lambda) \\ &\qquad\qquad + \sum_{j \in A\setminus\{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i} e^{-\lambda v(i)/q_i} \quad (n \geqslant 0,\ i \in E) \end{aligned}\right\} \tag{9.5.40}$$

由 (9.5.39) 和 (9.5.40) 以及

$$\left(1 + \frac{\lambda v(i)}{q_i}\right)^{-1} \geqslant e^{-\lambda v(i)/q_i} \quad (\lambda > 0, i \in E) \tag{9.5.41}$$

知

$$\varphi_{iA}(\lambda) \geqslant \hat{\varphi}_{iA}^{(n)}(\lambda) \quad (i \in E) \tag{9.5.42}$$

从而

$$F_{iA}(+\infty) \geqslant \hat{F}_{iA}(+\infty) \quad (i \in E) \tag{9.5.43}$$

故只需证

$$\hat{F}_{iA}(+\infty) \geqslant F_{iA}(+\infty) \quad (i \in E) \tag{9.5.44}$$

为此，令

$$w(i) = \min\left(1, \frac{v(i)}{q_i}\right) \quad (i \in E) \tag{9.5.45}$$

$$\check{\xi}_A^{(n)}(\omega) = \sum_{k=1}^{\hat{\tau}_A^{(n)}(\omega)} w(x_{k-1}(\omega)) \tag{9.5.46}$$

$$\check{\xi}_A(\omega) = \sum_{k=1}^{\hat{\tau}_A(\omega)} w(x_{k-1}(\omega)) \tag{9.5.47}$$

$$\check{F}_{iA}^{(n)}(t) = p(\check{\xi}_A^{(n)}(\omega) \leqslant t \mid x_0 = i) \tag{9.5.48}$$

$$\check{F}_{iA}(t) = p(\check{\xi}_A(\omega) \leqslant t \mid x_0 = i) \tag{9.5.49}$$

$$\check{\varphi}_{iA}^{(n)}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\check{F}_{iA}^{(n)}(t) \tag{9.5.50}$$

$$\check{\varphi}_{iA}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\check{F}_{iA}(t) \tag{9.5.51}$$

$$\check{F}_{iA}(+\infty) = \lim_{t\to\infty} \check{F}_{iA}(t) \tag{9.5.52}$$

显见

$$\check{F}_{iA}(+\infty) = \hat{F}_{iA}(+\infty) \quad (i \in E) \tag{9.5.53}$$

故只需证

$$\check{F}_{iA}(+\infty) \geqslant F_{iA}(+\infty) \quad (i \in E) \tag{9.5.54}$$

由于

$$e^{-\lambda w(i)} = \frac{1}{1 + \lambda w(i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \lambda^{n+1} w(i)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{1 + \lambda w(i) + w(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \lambda^{n+1} w(i)^{n}}$$

$$\geqslant \frac{1}{1+\lambda w(i)+w(i)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}}$$

$$=\frac{1}{1+\lambda w(i)+[e^{\lambda}-(\lambda+1)]w(i)}$$

$$=\frac{1}{1+(e^{\lambda}-1)w(i)}$$

$$\geqslant \frac{1}{1+(e^{\lambda}-1)\frac{v(i)}{q_i}} \quad (i\in E) \tag{9.5.55}$$

于是

$$\check{\varphi}_{iA}^{(n)}(\lambda)\geqslant \varphi_{iA}^{(n)}(e^{\lambda}-1) \quad (i\in E) \tag{9.5.56}$$

从而

$$\check{\varphi}_{iA}(\lambda)\geqslant \varphi_{iA}(e^{\lambda}-1) \quad (i\in E) \tag{9.5.57}$$

所以 (9.5.54) 成立. 定理证毕.

系 9.5.1. 对任一的 $i\in E$,

$$F_{iA}(+\infty)=0 \tag{9.5.58}$$

$$F_{iA}(+\infty)=1 \tag{9.5.59}$$

以及

$$0<F_{iA}(+\infty)<1 \tag{9.5.60}$$

的充要条件分别是

$$\hat{F}_{iA}(+\infty)=0 \tag{9.5.61}$$

$$\hat{F}_{iA}(+\infty)=1 \tag{9.5.62}$$

以及

$$0<F_{iA}(+\infty)<1 \tag{9.5.63}$$

定理 9.5.5.

$$\hat{T}_{iA}^{(p)}\leqslant T_{iA}^{(p)}\leqslant p!\,\hat{T}_{iA}^{(p)} \quad (i\in E) \tag{9.5.64}$$

证. 由定理 6.7.4 和定理 9.5.2 知

$$T_{iA}=\hat{T}_{iA} \quad (i\in E) \tag{9.5.65}$$

于是定理对 $p=1$ 真. 今假定定理对 $p-1$ 已真,即有

$$\hat{T}_{iA}^{(p-1)}\leqslant T_{iA}^{(p-1)}\leqslant (p-1)!\,\hat{T}_{iA}^{(p-1)} \quad (i\in E) \tag{9.5.66}$$

往证对 p 亦真.

易知, $\{\hat{T}_{iA}^{(p)}, i\in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$x_i=\sum_{j\in\{i\}\cup A}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j+\sum_{l=1}^{p}C_p^l\left[\frac{v(i)}{q_i}\right]^l\sum_{j\notin\{i\}\cup A}\frac{q_{ij}}{q_i}\hat{T}_{jA}^{(p-l)}$$
$$+\left[\frac{v(i)}{q_i}\right]^p\sum_{j\in A\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}\quad(i\in E)\tag{9.5.67}$$

的最小非负解, 于是由

$$C_{p-1}^{l-1}\leqslant\frac{p}{l}C_{p-1}^{l-1}=C_p^l\leqslant pC_{p-1}^{l-1}\quad(p\geqslant l\geqslant 1)\tag{9.5.68}$$

得

$$\frac{v(i)}{q_i}\hat{T}_{iA}^{(p-1)}\leqslant\sum_{l=1}^{p}C_p^l\left[\frac{v(i)}{q_i}\right]^l\sum_{j\notin\{i\}\cup A}\frac{q_{ij}}{q_i}\hat{T}_{jA}^{(p-l)}$$
$$+\left[\frac{v(i)}{q_i}\right]^p\sum_{j\in A\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}\leqslant\frac{pv(i)}{q_i}\hat{T}_{iA}^{(p-1)}\quad(i\in E)\tag{9.5.69}$$

于是, 若以 $\{\check{T}_{iA}, i\in E\}$ 表示第一型囿壹方程

$$x_i=\sum_{j\notin\{i\}\cup A}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j+\frac{pv(i)}{q_i}\hat{T}_{iA}^{(p-1)}\quad(i\in E)\tag{9.5.70}$$

的最小非负解, 则

$$\hat{T}_{iA}^{(p)}\leqslant\check{T}_{iA}^{(p)}\quad(i\in E)\tag{9.5.71}$$

由 (9.5.66) 的前半部分和定理 9.5.2 得

$$\check{T}_{iA}^{(p)}\leqslant T_{iA}^{(p)}\quad(i\in E)\tag{9.5.72}$$

由 (9.5.71) 和 (9.5.72) 立知 (9.5.64) 的前半部分对 p 成立. 以 $\{\dot{T}_{iA}^{(p)}, i\in E\}$ 表示第一型囿壹方程

$$x_i=\sum_{j\notin\{i\}\cup A}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j+\frac{p!v(i)}{q_i}T_{iA}^{(p-1)}\quad(i\in E)\tag{9.5.73}$$

的最小非负解, 则由 (9.5.69) 知

$$p!\hat{T}_{iA}^{(p)}\geqslant\dot{T}_{iA}^{(p)}\quad(i\in E)\tag{9.5.74}$$

由 (9.5.66) 的后半部分得

$$p!\frac{v(i)}{q_i}\hat{T}_{iA}^{(p-1)}\geqslant p\frac{v(i)}{q_i}T_{iA}^{(p-1)}\quad(i\in E)\tag{9.5.75}$$

于是由定理 9.5.2 得

$$\dot{T}_{iA}^{(p)} \geqslant T_{iA}^{(p)} \quad (i \in E) \tag{9.5.76}$$

由 (9.5.74) 和 (9.5.76) 立得 (9.5.64) 的后半部分对 p 亦成立. 于是由归纳法知定理真确.

系 9.5.2. 对某一 $i \in E$,

$$T_{iA}^{(p)} < +\infty \tag{9.5.77}$$

的充要条件是

$$\hat{T}_{iA}^{(p)} < +\infty \tag{9.5.78}$$

(9.5.17) 和 (9.5.19) 式把 $\xi_A(\omega)$ 和 $\xi(\omega)$ 的分布和矩的计算问题归结为 $\xi_{H_N}(\omega)$ 的分布和矩的计算问题. 因此我们就来研究 $\xi_{H_N}(\omega)$ 的分布和矩的计算问题. 本节以下结果是第五章的直接推论,故论证从略.

令

$$\lim_{\lambda \to +0} \phi_{iH_N}(\lambda) = \phi_{iH_N}(0) \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{9.5.79}$$

$$D^{(N)} = (1, 2, \cdots, N) \cap (i : i \underset{R}{\not\rightsquigarrow} H_N) \tag{9.5.80}$$

$$\overline{D}^{(N)} = (1, 2, \cdots, N) \cap (i : i \underset{R}{\rightsquigarrow} H_N) \tag{9.5.81}$$

$$\hat{D}^{(N)} = D^{(N)} \cap (R \text{ 的本质足码集}) \tag{9.5.82}$$

$$\check{D}^{(N)} = D^{(N)} \cap (R \text{ 的非本质足码集}) \tag{9.5.83}$$

$$t_{ij} = \begin{cases} q_{ij}/q_i, & i \neq j,\ i,\ j \in \hat{D}^{(N)} \\ 0, & i = j,\ i,\ j \in \hat{D}^{(N)} \text{ 或 } i = 0,\ j \in \hat{D}^{(N)} \\ v(i), & i \in \hat{D}^{(N)},\ j = 0 \\ 1, & i = j = 0 \end{cases} \tag{9.5.84}$$

构造矩阵

$$T = (t_{ij},\ i,\ j \in \{0\} \cup \hat{D}^{(N)}) \tag{9.5.85}$$

令

$$\hat{D}_1^{(N)} = (i : i \in \hat{D}^{(N)} \text{ 且 } i \underset{T}{\not\rightsquigarrow} 0) \tag{9.5.86}$$

$$\hat{D}_2^{(N)} = (i : i \in \hat{D}^{(N)} \text{ 且 } i \underset{T}{\rightsquigarrow} 0) \tag{9.5.87}$$

$$\check{D}_1^{(N)} = (i : i \in \check{D}^{(N)} \text{ 且 } i \underset{R}{\not\rightsquigarrow} \hat{D}_2^{(N)}) \tag{9.5.88}$$

$$\check{D}_2^{(N)} = (i: i \in \check{D}^{(N)} \text{ 且 } i \underset{R}{\rightsquigarrow} \hat{D}_2^{(N)}) \tag{9.5.89}$$

$$\bar{D}_1^{(N)} = (i: i \in \bar{D}^{(N)} \text{ 且 } i \overset{H_N}{\underset{R}{\rightsquigarrow}} \hat{D}_2^{(N)}) \tag{9.5.90}$$

$$\bar{D}_2^{(N)} = (i: i \in \bar{D}^{(N)} \text{ 且 } i \overset{H_N}{\underset{R}{\rightsquigarrow}} \hat{D}_2^{(N)}) \tag{9.5.91}$$

定理 9.5.6. $\phi_{iH_N}(\lambda)\ (\lambda > 0,\ i = 1, 2, \cdots, N)$ 是N维拟规格方程

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{q_{ij}}{\lambda v(i) + q_i} x_j + \frac{\lambda v(i)}{\lambda v(i) + q_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{9.5.92}$$

的最小非负解. 详言之, $\phi_{iH_N}(\lambda)\ (\lambda \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, N)$ 如下唯一决定:

(i) $\phi_{iH_N}(\lambda)\quad (\lambda \geqslant 0,\ i \in \hat{D}_1^{(N)})$ 是第一型组合随机齐次方程

$$x_i = \sum_{j \in \hat{D}_1^{(N)} \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j \quad (i \in \hat{D}_1^{(N)}) \tag{9.5.93}$$

的最小非负解,即零解,从而

$$\phi_{iH_N}(\lambda) \equiv 0 \quad (\lambda \geqslant 0,\ i \in \hat{D}_1^{(N)}) \tag{9.5.94}$$

(ii) $\phi_{iH_N}(\lambda)\quad (\lambda \geqslant 0,\ i \in \check{D}_1^{(N)})$ 是第一型通外方程

$$x_i = \sum_{j \in \check{D}_1^{(N)} \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{\lambda v(i) + q_i} x_j + \frac{\lambda v(i)}{\lambda v(i) + q_i} \quad (i \in \check{D}_1^{(N)}) \tag{9.5.95}$$

的最小非负解,即其唯一(有限)解.

(iii) $\phi_{iH_N}(\lambda)\quad (\lambda \geqslant 0,\ i \in \bar{D}_1^{(N)})$ 是第一型通外方程

$$x_i = \sum_{j \in \bar{D}_1^{(N)} \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{\lambda v(i) + q_i} x_j + \sum_{j \in \check{D}_1^{(N)} \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{\lambda v(i) + q_i} \phi_{jH_N}(\lambda) + \frac{\lambda v(i)}{\lambda v(i) + q_i} \quad (i \in \bar{D}_1^{(N)}) \tag{9.5.96}$$

的最小非负解,即其唯一(有限)解.

(iv) $\phi_{iH_N}(\lambda)\quad (\lambda > 0,\ i \in \hat{D}_2^{(N)})$ 是规格通外方程

$$x_i = \sum_{j \in \hat{D}_2^{(N)} \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{\lambda v(i) + q_i} x_j + \frac{\lambda v(i)}{\lambda v(i) + q_i} \quad (i \in \hat{D}_2^{(N)}) \tag{9.5.97}$$

的最小非负解，即其唯一(有限)解，从而

$$\phi_{iH_N}(\lambda)\equiv 1 \quad (\lambda>0, i\in \hat{D}_2^{(N)}) \tag{9.5.98}$$

当 $\lambda=0$ 时相应的结论不成立. 详言之，当 $\lambda=0$ 时 (9.5.97) 变成次之第一型组合随机齐次方程

$$x_i=\sum_{j\in \hat{D}_2^{(N)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j \quad (i\in \hat{D}_2^{(N)}) \tag{9.5.99}$$

从而 (9.5.99) 的最小非负解 $x_i^*(i\in \hat{D}_2^{(N)})$ 是其零解，即

$$x_i^*\equiv 0 \quad (i\in \hat{D}_2^{(N)}) \tag{9.5.100}$$

而

$$\phi_{iH_N}(0)\equiv 1 \quad (i\in \hat{D}_2^{(N)}) \tag{9.5.101}$$

虽是 (9.5.99) 的一个非负解，但不是其最小非负解，即不是其零解.

(v) $\phi_{iH_N}(\lambda)$ $(\lambda\geqslant 0, i\in \check{D}_2^{(N)})$ 是第一型通外严格非齐次方程

$$x_i=\sum_{j\in \check{D}_2^{(N)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{\lambda v(i)+q_i}x_j+\sum_{j\in \hat{D}_2^{(N)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{\lambda v(i)+q_i}$$
$$+\sum_{j\in \check{D}_1^{(N)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{\lambda v(i)+q_i}\phi_{jH_N}(\lambda)+\frac{\lambda v(i)}{\lambda v(i)+q_i}$$
$$(i\in \check{D}_2^{(N)}) \tag{9.5.102}$$

的最小非负解，即其唯一(有限)解，从而

$$\phi_{iH_N}(\lambda)>0 \quad (\lambda\geqslant 0, i\in \check{D}_2^{(N)}) \tag{9.5.103}$$

(vi) $\phi_{iH_N}(\lambda)$ $(\lambda\geqslant 0, i\in \overline{D}_2^{(N)})$ 是第一型通外严格非齐次方程

$$x_i=\sum_{j\in \overline{D}_2^{(N)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{\lambda v(i)+q_i}x_j+\sum_{j\in \hat{D}_2^{(N)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{\lambda v(i)+q_i}$$
$$+\sum_{j\in \check{D}^{(N)}\cup \overline{D}_1^{(N)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{\lambda v(i)+q_i}\phi_{jH_N}(\lambda)$$
$$+\frac{\lambda v(i)}{\lambda v(i)+q_i} \quad (i\in \overline{D}_2^{(N)}) \tag{9.5.104}$$

的最小非负解,即其唯一(有限)解,从而

$$\phi_{iH_N}(\lambda) > 0 \quad (\lambda \geqslant 0, i \in \overline{D}_2^{(N)}) \tag{9.5.105}$$

注 9.5.2. 由定理 9.5.6 知

$$\phi_{iH_N}(\lambda) \equiv 0 \quad (\lambda \geqslant 0, i \in \hat{D}_1^{(N)} \cup \check{D}_1^{(N)} \cup \overline{D}_1^{(N)}) \tag{9.5.106}$$

$$\phi_{iH_N}(\lambda) > 0 \quad (\lambda \geqslant 0, i \in \hat{D}_2^{(N)} \cup \check{D}_2^{(N)} \cup \overline{D}_2^{(N)}) \tag{9.5.107}$$

定理 9.5.7. T_{iH_N} $(i = 1, 2, \cdots, N)$ 是第一型正则方程

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j + \frac{v(i)}{q_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{9.5.108}$$

的最小非负解. 详言之

(i) T_{iH_N} $(i \in \hat{D}_1^{(N)})$ 是组合随机齐次方程

$$x_i = \sum_{j \in \hat{D}_1^{(N)} \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j \quad (i \in \hat{D}_1^{(N)}) \tag{9.5.109}$$

的零解,从而

$$T_{iH_N} \equiv 0 \quad (i \in \hat{D}_1^{(N)}) \tag{9.5.110}$$

(ii) T_{iH_N} $(i \in \check{D}_1^{(N)} \cup \overline{D}_1^{(N)})$ 是第一型通外方程

$$x_i = \sum_{j \in \check{D}_1^{(N)} \cup \overline{D}_1^{(N)} \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j + \frac{v(i)}{q_i} \quad (i \in \check{D}_1^{(N)} \cup \overline{D}_1^{(N)}) \tag{9.5.111}$$

的唯一(有限)解.

(iii) T_{iH_N} $(i \in \hat{D}_2^{(N)} \cup \check{D}_2^{(N)} \cup \overline{D}_2^{(N)})$ 是随机添加严格非齐次方程

$$x_i = \sum_{j \in \hat{D}_2^{(N)} \cup \check{D}_2^{(N)} \cup \overline{D}_2^{(N)} \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j + \sum_{j \in \check{D}_1^{(N)} \cup \overline{D}_1^{(N)} \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i} T_{jH_N} + \frac{v(i)}{q_i} \quad (i \in \hat{D}_2^{(N)} \cup \check{D}_2^{(N)} \cup \overline{D}_2^{(N)}) \tag{9.5.112}$$

的最小非负解,从而

$$T_{iH_N} = +\infty \quad (i \in \hat{D}_2^{(N)} \cup \check{D}_2^{(N)} \cup \overline{D}_2^{(N)}) \tag{9.5.113}$$

定理 9.5.8. $T_{iH_N}^{(p)}$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ 是第一型正规方程

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j + \frac{pv(i)}{q_i} T_{iH_N}^{(p-1)} \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{9.5.114}$$

的最小非负解．详言之，

（i）$T^{(p)}_{iH_N}$ $(i\in\hat{D}_1^{(N)})$ 是第一型组合随机齐次方程

$$x_i=\sum_{j\in\hat{D}_1^{(N)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j\quad(i\in\hat{D}_1^{(N)})\tag{9.5.115}$$

的零解，从而

$$T^{(p)}_{iH_N}\equiv 0\quad(i\in\hat{D}_1^{(N)})\tag{9.5.116}$$

（ii）$T^{(p)}_{iH_N}$ $(i\in\check{D}_1^{(N)}\cup\overline{D}_1^{(N)})$ 是第一型通外方程

$$x_i=\sum_{j\in\check{D}_1^{(N)}\cup\overline{D}_1^{(N)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j+\frac{pv(i)}{q_i}T^{(p-1)}_{iH_N}$$

$$(i\in\check{D}_1^{(N)}\cup\overline{D}_1^{(N)})\tag{9.5.117}$$

的唯一(有限)解，且

$$T^{(p)}_{iH_N}\leqslant p!c^p\quad(i\in\check{D}_1^{(N)}\cup\overline{D}_1^{(N)})\tag{9.5.118}$$

（iii）设 $p\geqslant 2$，$T^{(p)}_{iH_N}$ $(i\in\hat{D}_2^{(N)}\cup\check{D}_2^{(N)}\cup\overline{D}_2^{(N)})$ 是常数项本质无穷方程

$$x_i=\sum_{j\in\hat{D}_2^{(N)}\cup\check{D}_2^{(N)}\cup\overline{D}_2^{(N)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j+\sum_{j\in\check{D}_1^{(N)}\cup\overline{D}_1^{(N)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}T^{(p)}_{jH_N}$$

$$+\frac{pv(i)}{q_i}T^{(p-1)}_{iH_N}\quad(i\in\hat{D}_2^{(N)}\cup\check{D}_2^{(N)}\cup\overline{D}_2^{(N)})\tag{9.5.119}$$

的最小非负解，从而

$$T^{(p)}_{iH_N}=+\infty\quad(i\in\hat{D}_2^{(N)}\cup\check{D}_2^{(N)}\cup\overline{D}_2^{(N)})\tag{9.5.120}$$

注 9.5.3. 以上我们研究了 $\xi_A(\omega)$ 的分布和矩的计算问题．下一节我们顺便还给出 $\xi_A(\omega)$ 的分布的矩

$$\int_{-0}^{\infty}t^p dP(\xi_A(\omega)\leqslant t\,|\,x_0=i)\tag{9.5.121}$$

的计算方法．这在

$$P(\xi_A(\omega)=+\infty)>0\tag{9.5.122}$$

时是很必要的，因这时

$$T^{(p)}_{iA}=+\infty\quad(i\in E,\ p\geqslant 1)\tag{9.5.123}$$

所以我们仅以考察 $\xi_A(\omega)$ 的分布和矩为满足就显得不够了．

§ 9.6. 拟可推集上的积分型泛函的分布和矩

定义 9.6.1. 集 $\Lambda \in \mathscr{F}\{x_t, t < \sigma\}$ 叫做过程 $X(\omega) = \{x_t, t < \sigma\}$ 的可推集,如果

$$\theta_{\tau^{(1)}}\Lambda \doteq \Lambda \tag{9.6.1}$$ [1]

其中 $\theta_{\tau^{(1)}}$ 为 [6] 中定义的推移算子.

定义 9.6.2. 集 $\Lambda \in \mathscr{F}\{x_t, t < \sigma\}$ 叫做过程 $X(\omega) = \{x_t, t < \sigma\}$ 的拟可推集, 如果存在 E 的分解 $E = E^{(1)} \cup E^{(2)}$, $E^{(1)} \cap E^{(2)} = \varnothing$, 使

(i) 对任一 $j \in E^{(1)}$ 使

$$(x_{\tau^{(1)}} = j,\ \Lambda) \doteq (x_{\tau^{(1)}} = j,\ \theta_{\tau^{(1)}}\Lambda) \tag{9.6.2}$$

(ii) 对任一 $j \in E^{(2)}$ 使

$$(x_{\tau^{(1)}} = j,\ \Lambda) \doteq (x_{\tau^{(1)}} = j,\ \Lambda_j) \tag{9.6.3}$$

其中 $\Lambda_j(j \in E^{(2)})$ 是过程 $X(\omega)$ 的可推集.

显然,当 $E^{(2)} = \varnothing$ 时,拟可推集就成了可推集.

设 Λ 为拟可推集, $\xi_A^{(n)}(\omega)$ 和 $\xi_A(\omega)$ 的定义如 § 9.5. 令

$$\overset{(\Lambda)}{F}{}_{iA}^{(n)}(t) = P(\xi_A^{(n)}(\omega) \leqslant t,\ \Lambda \mid x_0 = i) \tag{9.6.4}$$

$$\overset{(\Lambda)}{F}{}_{iA}(t) = P(\xi_A(\omega) \leqslant t,\ \Lambda \mid x_0 = i) \tag{9.6.5}$$

$$\overset{(\Lambda)}{\varphi}{}_{iA}^{(n)}(\lambda) = \int_{-0}^{\infty} e^{-\lambda t} d\, \overset{(\Lambda)}{F}{}_{iA}^{(n)}(t) \quad (\lambda > 0) \tag{9.6.6}$$

$$\overset{(\Lambda)}{\varphi}{}_{iA}(\lambda) = \int_{-0}^{\infty} e^{-\lambda t} d\, \overset{(\Lambda)}{F}{}_{iA}(t) \quad (\lambda > 0) \tag{9.6.7}$$

$$\overset{(\Lambda)}{\phi}{}_{iA}^{(n)}(\lambda) = P_i(\Lambda) - \overset{(\Lambda)}{\varphi}{}_{iA}^{(n)}(\lambda) \tag{9.6.8}$$

$$\overset{(\Lambda)}{\phi}{}_{iA}(\lambda) = P_i(\Lambda) - \overset{(\Lambda)}{\varphi}{}_{iA}(\lambda) \tag{9.6.9}$$

$$\overset{(\Lambda)}{T}{}_{iA}^{(n,p)} = M\{[\xi_A^{(n)}(\omega)]^p I_\Lambda(\omega) \mid x_0 = i\} \tag{9.6.10}$$

$$\overset{(\Lambda)}{T}{}_{iA}^{(p)} = M\{[\xi_A(\omega)]^p I_\Lambda(\omega) \mid x_0 = i\} \tag{9.6.11}$$

---

1) 在一般情况下, 此式的右端应为 $\Lambda \cap (\tau^{(1)} < \sigma)$. 但在假设 (9.1.1) 成立下有 $P(\tau^{(1)} < \sigma) = 1$, 所以这时以 Λ 代替 $\Lambda \cap (\tau^{(1)} < \sigma)$.

其中

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\notin A\end{cases}\tag{9.6.12}$$

为集 A 的示性函数.

本节的目的是给出 $\overset{(A)}{\psi}_{iA}(\lambda)$ 和 $\overset{(A)}{T}{}^{(p)}_{iA}$ 的计算方法.

易知

$$\text{V-}\lim_{n\to\infty}\overset{(A)}{\psi}{}^{(n)}_{iA}(\lambda)=\overset{(A)}{\psi}_{iA}(\lambda)\tag{9.6.13}$$

$$\text{V-}\lim_{n\to\infty}\overset{(A)}{T}{}^{(n,p)}_{iA}=\overset{(A)}{T}{}^{(p)}_{iA}\tag{9.6.14}$$

$$\overset{(A)}{T}{}^{(n,0)}_{iA}=\overset{(A)}{T}{}^{(0)}_{iA}=P_i(A)\tag{9.6.15}$$

引理 9.6.1. 设 A 为拟可推集,则

$$P_i(A)=\sum_{j\in E^{(1)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}P_j(A)+\sum_{j\in E^{(2)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}P_j(A_j)\quad(i\in E)\tag{9.6.16}$$

证. 先证明下面两个等式:

$$P(x_{\tau^{(1)}}=j,\ A\mid x_0=i)=\frac{q_{ij}}{q_i}P_j(A)\quad(j\in E^{(1)}\setminus\{i\})\tag{9.6.17}$$

$$P(x_{\tau^{(1)}}=j,\ A\mid x_0=i)=\frac{q_{ij}}{q_i}P_j(A_j)\quad(j\in E^{(2)}\setminus\{i\})\tag{9.6.18}$$

当 $j\in(k:q_{ik}=0)$ 时 (9.6.17) 和 (9.6.18) 显见成立, 因这时它们的两端都等于零. 所以以下设 $i\in(k:q_{ik}\neq 0)$. 设 $j\in E^{(1)}\cap(k:q_{ik}\neq 0)\setminus\{i\}$, 则由 (9.6.2) 得

$$\begin{aligned}P(x_{\tau^{(1)}}=j,\ A\mid x_0=i)&=P(x_{\tau^{(1)}}=j,\ \theta_{\tau^{(1)}}A\mid x_0=i)\\&=P(x_{\tau^{(1)}}=j\mid x_0=i)=P(\theta_{\tau^{(1)}}A\mid x_0=i,\ x_{\tau^{(1)}}=j)\\&=\frac{q_{ij}}{q_i}P(A\mid x_0=j)=\frac{q_{ij}}{q_i}P_j(A)\end{aligned}\tag{9.6.19}$$

设 $j\in E^2\cap(k:q_{ik}\neq 0)\setminus\{i\}$, 则由 (9.6.1) 和 (9.6.3) 得

$$\begin{aligned}P(x_{\tau^{(1)}}=j,\ A\mid x_0=i)&=P(x_{\tau^{(1)}}=j,\ A_j\mid x_0=i)\\&=P(x_{\tau^{(1)}}=j,\theta_{\tau^{(1)}}A_j\mid x_0=i)=\frac{q_{ij}}{q_i}P_j(A_j)\end{aligned}\tag{9.6.20}$$

于是(9.6.17)和(9.6.18)得证.

由(9.6.17),(9.6.18)以及

$$P_i(\Lambda)=\sum_{j\neq i}P(x_{\tau^{(1)}}=j,\ \Lambda\,|\,x_0=i) \tag{9.6.21}$$

立得我们的引理.

引理 9.6.2. $\overset{(\Lambda)}{F}{}^{(n)}_{iA}(t)$ 满足次之公式:

$$\left.\begin{aligned}
\overset{(\Lambda)}{F}{}^{(1)}_{iA}(t)&=P_i(\Lambda)P(v(i)\tau^{(1)}\leqslant t\,|\,x_0=i)\quad(i\in E)\\
\overset{(\Lambda)}{F}{}^{(n+1)}_{iA}(t)&=\sum_{j\in\bar{A}\cap E^{(1)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}\int_{-0}^{t}\overset{(\Lambda)}{F}{}^{(n)}_{jA}(t-u)dP(v(i)\tau^{(1)}\\
&\quad\leqslant u\,|\,x_0=i)+\sum_{j\in\bar{A}\cap E^{(2)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}\\
&\quad\times\int_{-0}^{t}\overset{(\Lambda_j)}{F}{}^{(n)}_{jA}(t-u)dP(v(i)\tau^{(1)}\leqslant u\,|\,x_0=i)\\
&\quad+\sum_{j\in A\cap E^{(1)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}P(v(i)\tau^{(1)}\leqslant t\,|\,x_0=i)P_j(\Lambda)\\
&\quad+\sum_{j\in A\cap E^{(2)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}P(v(i)\tau^{(1)}\leqslant t\,|\,x_0=i)\\
&\quad+P_j(\Lambda_j)\quad(n\geqslant 1,\ i\in E)
\end{aligned}\right\}\tag{9.6.22}$$

证. 参考引理 9.3.7 和引理 9.6.1 两引理的证明易完成本引理的证明.

引理 9.6.3. $\overset{(\Lambda)}{\varphi}{}^{(n)}_{iA}(\lambda)$ 满足次之公式:

$$\left.\begin{aligned}
\overset{(\Lambda)}{\varphi}{}^{(1)}_{iA}(\lambda)&=\frac{q_iP_i(\Lambda)}{\lambda v(i)+q_i}\quad(i\in E)\\
\overset{(\Lambda)}{\varphi}{}^{(n+1)}_{iA}(\lambda)&=\sum_{j\in\bar{A}\cap E^{(1)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{\lambda v(i)+q_i}\overset{(\Lambda)}{\varphi}{}^{(n)}_{jA}(\lambda)\\
&\quad+\sum_{j\in\bar{A}\cap E^{(2)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{\lambda v(i)+q_i}\overset{(\Lambda_j)}{\varphi}{}^{(n)}_{jA}(\lambda)\\
&\quad+\sum_{j\in A\cap E^{(1)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{\lambda v(i)+q_i}P_j(\Lambda)
\end{aligned}\right\}\tag{9.6.23}$$

$$+\sum_{j\in A\cap E^{(2)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{\lambda v(i)+q_i}P_j(A_j)\Bigg\}$$

$$(n\geqslant 1,\ i\in E)$$

证．注意引理 9.3.1 和引理 9.3.3，并对 (9.6.22) 的两端取 Laplace-Stieltjes 变换，立得我们的引理．

引理 9.6.4. $\overset{(A)}{\phi}{}_{iA}^{(n)}(\lambda)$ 满足次之公式:

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(A)}{\phi}{}_{iA}^{(1)}(\lambda)=\frac{\lambda v(i)P_i(A)}{\lambda v(i)+q_i}\quad(i\in E)\\
&\overset{(A)}{\phi}{}_{iA}^{(n+1)}(\lambda)=\sum_{j\in \bar{A}\cap E^{(1)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{\lambda v(i)+q_i}\overset{(A)}{\phi}{}_{jA}^{(n)}(\lambda)\\
&\qquad+\sum_{j\in \bar{A}\cap E^{(2)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{\lambda v(i)+q_i}\overset{(A_j)}{\phi}{}_{jA}^{(n)}(\lambda)\\
&\qquad+\frac{\lambda v(i)P_i(A)}{\lambda v(i)+q_i}\quad(n\geqslant 1,\ i\in E)
\end{aligned}\right\}\qquad(9.6.24)$$

证．由 (9.6.8) 和 (9.6.24) 立得我们的引理．

引理 9.6.5. $\overset{(A)}{T}{}_{iA}^{(n,p)}$ 满足次之公式:

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(A)}{T}{}_{iA}^{(1,p)}=P_i(A)p!\left(\frac{v(i)}{q_i}\right)^p\quad(i\in E)\\
&\overset{(A)}{T}{}_{iA}^{(n+1,p)}=\sum_{j\in \bar{A}\cap E^{(1)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}\sum_{l=0}^{p}C_p^l l!\left(\frac{v(i)}{q_i}\right)^l\overset{(A)}{T}{}_{jA}^{(n,p-l)}\\
&\qquad+\sum_{j\in \bar{A}\cap E^{(2)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}\sum_{l=0}^{p}C_p^l l!\left(\frac{v(i)}{q_i}\right)^l\overset{(A_j)}{T}{}_{jA}^{(n,p-l)}\\
&\qquad+\Bigg(\sum_{j\in A\cap E^{(1)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}P_j(A)\\
&\qquad+\sum_{j\in A\cap E^{(2)}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}P_j(A_j)\Bigg)p!\left(\frac{v(i)}{q_i}\right)\\
&\qquad(n\geqslant 1,\ i\in E)
\end{aligned}\right\}\qquad(9.6.25)$$

证．由

$$P(\xi_A^{(n)} < +\infty) = 1 \tag{9.6.26}$$

知

$$\overset{(A)}{T}{}_{iA}^{(n,p)} = \int_{-0}^{\infty} t^p d \overset{(A)}{F}{}_{iA}^{(n)}(t) \tag{9.6.27}$$

由 (9.6.27)，引理 9.6.2 以及引理 9.3.4 立得我们的引理.

定理 9.6.1. 设 A 为可推集，则 $\{\overset{(A)}{\psi}{}_{iA}(\lambda), i \in E\}$ 是拟规格方程

$$x_i = \sum_{j \in \bar{A} \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{\lambda v(i) + q_i} x_j + \frac{\lambda v(i) P_i(A)}{\lambda v(i) + q_i} \quad (i \in E) \tag{9.6.28}$$

的最小非负解.

证. 由 (9.6.13)，引理 9.6.4 以及定理 3.2.1 立得我们的定理.

定理 9.6.2. 设 A 为可推集，则对于 $p \geq 1$，$\{\overset{(A)}{T}{}_{iA}^{(p)}, i \in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$x_i = \sum_{j \in \bar{A} \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j + \frac{p v(i)}{q_i} \overset{(A)}{T}{}_{iA}^{(p-1)} \quad (i \in E) \tag{9.6.29}$$

的最小非负解.

证. 参考定理 9.3.3 的证明易完成本定理的证明.

定理 9.6.3. 设 A 为拟可推集，则 $\{\overset{(A)}{\psi}{}_{iA}(\lambda), i \in E\}$ 是拟规格方程

$$x_i = \sum_{j \in \bar{A} \cap E^{(1)} \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{\lambda v(i) + q_i} x_j + \sum_{j \in \bar{A} \cap E^{(2)} \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{\lambda v(i) + q_i} \overset{(A_j)}{\psi}{}_{jA}(\lambda)$$
$$+ \frac{\lambda v(i) P_i(A)}{\lambda v(i) + q_i} \quad (i \in E) \tag{9.6.30}$$

的最小非负解.

证. 由 (9.6.13)，(9.6.24) 以及定理 3.2.2 立得我们的定理.

定理 9.6.4. 设 A 为拟可推集，则对于 $p \geq 1$，$\{\overset{(A)}{T}{}_{iA}^{(p)}, i \in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$x_i = \sum_{j \in \bar{A} \cap E^{(1)} \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j + \sum_{j \in \bar{A} \cap E^{(2)} \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i} \overset{(A_j)}{T}{}_{jA}^{(p)}$$

$$+\frac{pv(i)}{q_i}\overset{(A)}{T}{}_{iA}^{(p-1)}\quad(i\in E)\tag{9.6.31}$$

的最小非负解.

证. 参考定理 9.3.3 的证明易完成我们定理的证明.

定理 9.6.5. 设Δ为可推集,令

$$A=(\omega:{}_H\sigma_A(\omega)<+\infty)\cap\Delta\tag{9.6.32}$$

则A为拟可推集,且$\{\overset{(A)}{\phi}{}_{iA}(\lambda),i\in E\}$是拟规格方程

$$x_i=\sum_{j\in\overline{A\cup H}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{\lambda v(i)+q_i}x_j+\frac{\lambda v(i)P_i(A)}{\lambda v(i)+q_i}\quad(i\in E)\tag{9.6.33}$$

的最小非负解,对于$p\geq 1$,$\{\overset{(A)}{T}{}_{iA}^{(p)};i\in E\}$是第一型固壹方程

$$x_i=\sum_{j\in\overline{A\cup H}\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j+\frac{pv(i)}{q_i}\overset{(A)}{T}{}_{iA}^{(p-1)}\quad(i\in E)\tag{9.6.34}$$

的最小非负解.

证. 显见,A为拟可推集,且

$$E^{(1)}=\overline{A\cup H}\tag{9.6.35}$$

$$E^{(2)}=A\cup H\tag{9.6.36}$$

$$(x_{\tau^{(1)}}=j,A)=(x_{\tau^{(1)}}=j,\Delta)\quad(j\in A)\tag{9.6.37}$$

$$(x_{\tau^{(1)}}=j,A)=(x_{\tau^{(1)}}=j,\varnothing)=\varnothing\quad(j\in H)\tag{9.6.38}$$

于是

$$\bar{A}\cap E^{(1)}=\overline{A\cup H}\tag{9.6.39}$$

$$\bar{A}\cap E^{(2)}=\bar{A}\cap H\subset H\tag{9.6.40}$$

$$A\cap E^{(1)}=\varnothing\tag{9.6.41}$$

$$A\cap E^{(2)}=A\tag{9.6.42}$$

$$\overset{(A_j)}{\phi}{}_{jA}(\lambda)=\overset{(\varnothing)}{\phi}{}_{jA}(\lambda)=0\quad(j\in H)\tag{9.6.43}$$

$$\overset{(A_j)}{T}{}_{jA}^{(p)}=\overset{(\varnothing)}{T}{}_{jA}^{(p)}=0\quad(p\geq 1,j\in H)\tag{9.6.44}$$

所以由定理 9.6.3 和定理 9.6.4 立得我们的定理.

定理 9.6.6. 设Δ为可推集,令

$$A=(\omega:\sigma_A(\omega)=+\infty)\cap\Delta\tag{9.6.45}$$

则 Λ 为拟可推集,且

$$\overset{(\Lambda)}{\psi}_{i\Lambda}(\lambda) = \overset{(\Lambda)}{\psi}_i(\lambda) \quad (i \in E) \tag{9.6.46}$$

$$\overset{(\Lambda)}{T}{}_{i\Lambda}^{(p)} = \overset{(\Lambda)}{T}{}_i^{(p)} \quad (i \in E) \tag{9.6.47}$$

而 $\{\overset{(\Lambda)}{\psi}_i(\lambda), i \in E\}$ 是拟规格方程

$$x_i = \sum_{j \in \Lambda \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{\lambda v(i) + q_i} x_j + \frac{\lambda v(i) P_i(\Lambda)}{\lambda v(i) + q_i} \quad (i \in E) \tag{9.6.48}$$

的最小非负解, 对于 $p \geqslant 1$, $\{\overset{(\Lambda)}{T}{}_i^{(p)}, i \in E\}$ 是一型囿壹方程

$$x_i = \sum_{j \in \Lambda \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j + \frac{p v(i)}{q_i} \overset{(\Lambda)}{T}{}_i^{(p-1)} \quad (i \in E) \tag{9.6.49}$$

的最小非负解.

证. 显见, Λ 为拟可推集,且

$$E^{(1)} = \bar{\Lambda} \tag{9.6.50}$$

$$E^{(2)} = \Lambda \tag{9.6.51}$$

$$(x_{\tau^{(1)}} = j, \Lambda) = (x_{\tau^{(1)}} = j, \varnothing) = \varnothing \quad (j \in E^{(2)}) \tag{9.6.52}$$

而 (9.6.46) 和 (9.6.47) 显见成立. 于是由定理 9.6.3 和定理 9.6.4 立得我们的定理.

定理 9.6.7. 若令

$$W_i^{(p)} = \int_{-0}^{\infty} t^p dP_i(\xi(\omega) \leqslant t) \quad (p = 0, 1, \cdots) \tag{9.6.53}$$

则

$$W_i^{(0)} = \lim_{\lambda \to 0} \varphi_i(\lambda) \quad (i \in E) \tag{9.6.54}$$

及对于 $p \geqslant 1$, $\{W_i^{(p)}, i \in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$x_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j + \frac{p v(i)}{q_i} W_i^{(p-1)} \quad (i \in E) \tag{9.6.55}$$

的最小非负解.

证. 令

$$\Delta = (\omega : \xi(\omega) < +\infty) \tag{9.6.56}$$

于是

$$W_i^{(p)} = M\{[\xi(\omega)]^p I_\Delta(\omega) | x_0 = i\} \tag{9.6.57}$$

显见，Δ是一个可推集，于是由定理 9.6.2 立得我们的定理.

类似地，我们也可给出$\xi_A(\omega)$的分布的矩的计算方法.

§ 9.7. § 9.3 中的结果的推广

设Δ为可推集，$\xi_A(\omega)$的定义如 § 9.5. 令

$$ {}_H\overset{(v)}{\sigma}_A(\omega)=\begin{cases}\xi_A(\omega), & 如\ {}_H\sigma_A(\omega)<+\infty\\ +\infty, & 如\ {}_H\sigma_A(\omega)=+\infty\end{cases} \tag{9.7.1} $$

$$ {}_H\overset{(\Delta,v)}{\Phi}_{iA}(\lambda)=\int_{-0}^{\infty}e^{-\lambda t}dP({}_H\overset{(v)}{\sigma}_A(\omega)\leqslant t,\ \Delta|x_0=i) \tag{9.7.2} $$

$$ {}_H\overset{(\Delta,v)}{m}{}^{(p)}_{iA}=\int_{-0}^{\infty}t^p dP({}_H\overset{(v)}{\sigma}_A(\omega)\leqslant t,\ \Delta|x_0=i) \tag{9.7.3} $$

$$ {}_H\overset{(\Delta,v)}{f}{}^{*}_{iA}={}_H\overset{(\Delta,v)}{m}{}^{(0)}_{iA}=P({}_H\overset{(v)}{\sigma}_A(\omega)<+\infty,\ \Delta|x_0=i) \tag{9.7.4} $$

本节的结果的证明统统省略，因为可仿 § 9.3 和 § 9.6 中的论证把它们推导出来.

定理 9.7.1. $\{{}_H\overset{(\Delta,v)}{\Phi}_{iA}(\lambda),\ i\in E\}$是拟规格方程

$$ x_i=\sum_{j\notin\{i\}\cup A\cup H}\frac{q_{ij}}{\lambda v(i)+q_i}x_j+\sum_{j\in A\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}P_j(\Lambda)}{\lambda v(i)+q_i}\quad (i\in E) \tag{9.7.5} $$

的最小非负解.

定理 9.7.2. $\{{}_H\overset{(\Delta,v)}{f}{}^{*}_{iA},\ i\in E\}$是拟规格方程

$$ x_i=\sum_{j\notin\{i\}\cup A\cup H}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j+\sum_{j\in A\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}P_j(\Lambda)}{q_i}\quad (i\in E) \tag{9.7.6} $$

的最小非负解.

系 9.7.1. 若s是E的一个元素，则

$$ {}_H\overset{(\Delta,v)}{f}{}^{*}_{is}={}_H\overset{(\Omega,v)}{f}{}^{*}_{is}P_s(\Delta)\quad (i\in E) \tag{9.7.7} $$

$$ {}_H\overset{(\Delta,v)}{f}{}^{*}_{iA}=\sum_{j\in A}{}_{H\cup A}\overset{(\Omega,v)}{f}{}^{*}_{ij}P_j(\Delta)\quad (i\in E) \tag{9.7.8} $$

定理 9.7.3. 对于$p\geqslant 1$，$\{{}_H\overset{(\Delta,v)}{m}{}^{(p)}_{iA},\ i\in E\}$是第一型囿壹方程

$$ x_i=\sum_{j\notin\{i\}\cup A\cup H}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j+\frac{pv(i)}{q_i}{}_H\overset{(\Delta,v)}{m}{}^{(p-1)}_{iA}\quad (i\in E) \tag{9.7.9} $$

的最小非负解.

系 9.7.2.

$$ {}_{H}\overset{(\Delta,v)}{m}{}_{is}^{(p)} = {}_{H}\overset{(\Omega,v)}{m}{}_{is}^{(p)} P_s(\Delta) \quad (i \in E) \tag{9.7.10} $$

$$ {}_{H}\overset{(\Delta,v)}{m}{}_{iA}^{(p)} = \sum_{j \in A} {}_{H \cup A}\overset{(\Omega,v)}{m}{}_{ij}^{(p)} P_j(\Delta) \quad (i \in E) \tag{9.7.11} $$

注 9.7.1. 定理 9.7.3 也可由定理 9.6.5 推导出来.

第十章　一阶 Q 过程

§10.1. 引　　言

第一篇告诉我们，最小 Q 过程和一阶 Q 过程是研究一般 Q 过程的基础. 上章我们研究了最小 Q 过程，本章进而研究一阶 Q 过程.

从现在开始，将常常涉及 Q 过程的 Martin 流出边界理论. 关于这一理论不难在第七章中研究的马氏链的 Martin 边界理论的基础上对一般 Q 过程建立起来. 但为了节省篇幅，我们将不这样作，而直接引用 [14] 中的 Martin 边界理论及一些有关的结论. 这样作并不失一般性. 因为：(i) [14] 在建立 Martin 边界理论时虽对 Q 过程加上了一个限制 (那里记为 (P.5))，但正如那篇文章的作者所指出的，这不是本质的. 事实上，这点限制在第七章已为我们所解除；(ii) 在下面我们处处注意到，我们只引用 [14] 中实际上不为条件 (P.5) 所囿的那些结论. 因此，今后我们并不强调指出：在 Q 过程上加上了限制 (P.5).

这里首先申明，如在下面发现我们的陈述需除去某一测度为零的集或某一列测度的公共零测集外才能成立的时候，这并非作者的疏忽，而是为了简洁有意这样处理的. 因为这很易在保持过程的转移概率不变之下用一些惯用的手法（如通过相空间的清洗或在函数的一个"等价类"中选出一个代表）使之明朗化.

设 $X(\omega)=\{x(t,\omega),\ t<\sigma(\omega)\}$ 为一个一阶 Q 过程，以 $\tau_1(\omega)$ 表示 $x(\cdot,\omega)$ 的第一个飞跃点，以 $(\partial X)_c$ 表示 [14] 中定义的 $X(\omega)$ 的 (1-级) 流出边界. 令

$$H(b,j)=P(x(\tau_1)=j\,|\,x(\tau_1-0)=b)$$
$$(b\in(\partial X)_c,\ j\in E) \tag{10.1.1}$$

定义 10.1.1. 我们称 $\Pi_{(\partial X)_e\times E}=(\Pi(b,j),\ b\in(\partial X)_e,\ j\in E)$ 为一阶 Q 过程 $X(\omega)$ 的飞跃概率矩阵[1].

由 [14] 知，飞跃概率矩阵 $\Pi_{(\partial X)_e\times E}=(\Pi(b,j),\ b\in(\partial X)_e,\ j\in E)$ 有如下的性质:

(1) 对于固定的 $j\in E$, $\Pi(b,j)$ $(b\in(\partial X)_e)$ 是 $(\partial X)_e$ 上的 Borel 可测函数;

(2)

$$\Pi(b,j)\geqslant 0 \quad (b\in(\partial X)_e,\ j\in E) \tag{10.1.2}$$

$$\sum_{j\in E}\Pi(b,j)\leqslant 1 \quad (b\in(\partial X)_e) \tag{10.1.3}$$

反之,由 [14, §7] 知有

引理 10.1.1. 设矩阵 $\Pi_{(\partial X)_e\times E}=(\Pi(b,j),\ b\in(\partial X)_e,\ j\in E)$ 满足条件 (1) 和 (2), 则存在完备概率空间,在其上可以定义一个一阶 Q 过程,使其飞跃概率矩阵就是 $\Pi_{(\partial X)_e\times E}$.

上述引理将在第十三章中得到应用.

在 [14] 中把一阶 Q 过程称为 1-级瞬返过程.

由下面的定理 10.2.1 知，一个一阶 Q 过程的转移概率矩阵为 Q 矩阵和它的飞跃概率矩阵唯一决定,故引入

定义 10.1.2. 具有飞跃概率矩阵 $\Pi_{(\partial X)_e\times E}$ 的一阶 Q 过程又叫做 $(Q,\Pi_{(\partial X)_e\times E})$ 过程.

注 10.1.1. 设 $D\subset E$, 若 $\Pi(a,j)=0$ $(a\in(\partial X)_e, j\notin D)$, 常把 $\Pi_{(\partial X)_e\times E}$ 代以 $\Pi_{(\partial X)_e\times D}$.

下面将研究一阶 Q 过程，即 $(Q,\Pi_{(\partial X)_e\times E})$ 过程的转移概率及第一次到达时间的分布和矩两个问题. 由于积分型泛函的研究与第一次到达时间的研究类似，而状态的分类是第一次到达时间的分布和矩的直接推论，所以关于积分型泛函和状态的分类的内容均予省略.

---

1) 当 $(\partial X)_e$ 为非可列时,把 $\Pi_{(\partial X)_e\times E}$ 称为矩阵,似不妥当. 但习惯了也无不可.

§ 10.2. 转移概率

设 $X(\omega)=\{x(t,\omega),t<\sigma(\omega)\}$ 是一个 $(Q,\Pi_{(\partial X)_e\times E})$ 过程，令 $\mathscr{B}_e$ 表示由 $(\partial X)_e$ 中的开集系产生的 $(\partial X)_e$ 上的 σ-代数，

$$h(i,B)=P_i(x(\tau_1-0)\in B)\quad B\in\mathscr{B}_e \tag{10.2.1}$$

$$h(i,B,t)=P_i(x(\tau_1-0)\in B,\tau_1\leqslant t)\quad B\in\mathscr{B}_e \tag{10.2.2}$$

$$h_\lambda(i,B)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dh(i,B,t)\quad(\lambda\geqslant 0) \tag{10.2.3}$$

$$T_{ij}(t)=\int_{(\partial X)_e}h(i,da,t)\Pi(a,j) \tag{10.2.4}$$

$$T_{ij}^{(1)}(t)=T_{ij}(t) \tag{10.2.5}$$

$$T_{ij}^{(n+1)}(t)=\sum_{k\in E}[T_{ik}^{(n)}(\cdot)*T_{kj}^{(1)}(\cdot)](t)\quad(*\text{表示卷积}) \tag{10.2.6}$$

$$K_{ij}(t)=\sum_{n=1}^\infty T_{ij}^{(n)}(t) \tag{10.2.7}$$

$$W_{ij}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dT_{ij}(t)\quad(\lambda\geqslant 0) \tag{10.2.8}$$

$$W_{ij}^{(1)}(\lambda)=W_{ij}(\lambda) \tag{10.2.9}$$

$$W_{ij}^{(n+1)}(\lambda)=\sum_{k\in E}W_{ik}^{(n)}(\lambda)W_{kj}^{(1)}(\lambda) \tag{10.2.10}$$

$$p_{ij}^{\min}(t)=P_i(x(t)=j,t<\tau_1) \tag{10.2.11}$$

$$p_{ij}(t)=P_i(x(t)=j) \tag{10.2.12}$$

$$p_{ij}^{\min}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}p_{ij}^{\min}(t)dt \tag{10.2.13}$$

$$p_{ij}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}p_{ij}(t)dt \tag{10.2.14}$$

引理 10.2.1. $\{h(i,B)-h_\lambda(i,B),i\in E\}$ 是拟规格方程

$$x_i=\sum_{j\in E\setminus\{i\}}\frac{q_{ij}}{\lambda+q_i}x_j+\frac{\lambda h(i,B)}{\lambda+q_i}\quad(i\in E) \tag{10.2.15}$$

的最小非负解.

证. 在定理9.6.1中令 $A=\varnothing,V(i)\equiv 1(i\in E),\Lambda=(x(\tau_1-$

0) ∈ B）即得我们的引理.

定理 10.2.1. $\{p_{ij}(\lambda),\ i\in E\}$ 是第一型围壹方程

$$x_i=\sum_{k\in E}\left(\int_{(\partial X)_e}h_\lambda(i,da)\Pi(a,k)x_k\right)+p_{ij}^{\min}(\lambda)\quad(i\in E)\tag{10.2.16}$$

的最小非负解.

证. 由 (10.2.4) 和 (10.2.8) 得

$$W_{ij}(\lambda)=\int_{(\partial X)_e}h_\lambda(i,db)\Pi(b,j)\tag{10.2.17}$$

注意 [14, 附录中的公式 10] 立得

$$\begin{aligned}p_{ij}(\lambda)&=p_{ij}^{\min}(\lambda)+\int_{(\partial X)_e}h_\lambda(i,da)\left(\sum_{n=0}^{\infty}V_\lambda^{(n)}(a,db)\right)\\&\quad\times\sum_{k\in E}\Pi(b,k)p_{kj}^{\min}(\lambda)\\&=p_{ij}^{\min}(\lambda)+\sum_{k\in E}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\int_{(\partial X)_e}\int_{(\partial X)_e}h_\lambda(i,da)\right.\\&\quad\times V_\lambda^{(n)}(a,db)\Pi(b,k)p_{kj}^{\min}(\lambda)\end{aligned}\tag{10.2.18}$$

其中

$$V_\lambda^{(0)}(a,B)=\begin{cases}0 & a\bar{\in}B\\ 1 & a\in B\end{cases}\tag{10.2.19}$$

$$V_\lambda^{(1)}(a,B)=\sum_{l\in E}\Pi(a,l)h_\lambda(l,B)\tag{10.2.20}$$

$$V_\lambda^{(n+1)}(a,B)=\int_{(\partial X)_e}V_\lambda^{(n)}(a,db)V_\lambda^{(1)}(b,B)\tag{10.2.21}$$

下面证明

$$W_{ik}^{(n+1)}(\lambda)=\int_{(\partial X)_e}\int_{(\partial X)_e}h_\lambda(i,da)V_\lambda^{(n)}(a,db)\Pi(b,k)\quad(n\geqslant 0)\tag{10.2.22}$$

事实上

$$\begin{aligned}&\int_{(\partial X)_e}\int_{(\partial X)_e}h_\lambda(i,da)V_\lambda^{(0)}(a,db)\Pi(b,k)\\&=\int_{(\partial X)_e}h_\lambda(i,da)\int_{(\partial X)_e}V_\lambda^{(0)}(a,db)\Pi(b,k)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{(\partial X)_e} h_\lambda(i, da)\Pi(a, k) \\
&= \int_{(\partial X)_e} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} dh(i, da, t)\right] \Pi(a, k) \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_{(\partial X)_e} dh(i, da, t)\Pi(a, k) \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} d \int_{(\partial X)_e} h(i, da, t)\Pi(a, k) \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} dT_{ik}(t) = W_{ik}^{(1)}(\lambda)
\end{aligned}
\tag{10.2.23}
$$

故当 $n=0$ 时 (10.2.22) 成立. 今假定, (10.2.22) 对 n 已成立, 于是有

$$
\begin{aligned}
&\int_{(\partial X)_e}\int_{(\partial X)_e} h_\lambda(i, da)V_\lambda^{(n)}(a, db)\Pi(b, k) \\
&\quad = \int_{(\partial X)_e}\int_{(\partial X)_e} h_\lambda(i, da)\left[\int_{(\partial X)_e} V_\lambda^{(n-1)}(a, dc)\right. \\
&\qquad \left.\times V_\lambda^{(1)}(c, db)\right]\Pi(b, k) \\
&\quad = \int_{(\partial X)_e}\int_{(\partial X)_e} h_\lambda(i, da)\int_{(\partial X)_e} V_\lambda^{(n-1)}(a, dc) \\
&\qquad \times \sum_{l\in E} \Pi(c, l)h_\lambda(l, db)\Pi(b, k) \\
&\quad = \sum_{l\in E}\int_{(\partial X)_e}\int_{(\partial X)_e} h_\lambda(i, da)V_\lambda^{(n-1)}(a, dc)\Pi(c, l) \\
&\qquad \times \int_{(\partial X)_e} h_\lambda(l, db)\Pi(b, k) \\
&\quad = \sum_{l\in E} W_{il}^{(n)}(\lambda)W_{lk}^{(1)} = W_{ik}^{(n+1)}(\lambda)
\end{aligned}
\tag{10.2.24}
$$

于是 (10.2.22) 对 $n+1$ 亦成立. 由归纳法知 (10.2.22) 成立.

由 (10.2.18) 和 (10.2.22) 得

$$
p_{ij}(\lambda) = p_{ij}^{\min}(\lambda) + \sum_{k\in E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} W_{ik}^{(n)}(\lambda)\right) p_{kj}^{\min}(\lambda) \tag{10.2.25}
$$

由 (10.2.17) 和定理 3.7.1 立得我们的定理.

定义 10.2.1. 设 $k(\cdot, \Delta)\geqslant 0$ 和 $g(\cdot)\geqslant 0$ 是 $(\partial X)_e$ 上的可

测函数，$k(a,\cdot)$ 是 $(\partial X)_e$ 上的测度. 积分方程

$$\xi^{(a)} = \int_{(\partial X)_e} k(a, db)\xi^{(b)} + g(a) \quad (a \in (\partial X)_e) \qquad (10.2.26)$$

的非负解 $0 \leqslant \xi^{(a)} \leqslant +\infty (a \in (\partial X)_e)$ 称其为最小非负解，如果对于 (10.2.26) 的任一非负解 $0 \leqslant \hat{\xi}^{(a)} \leqslant +\infty (a \in (\partial X)_e)$，恒有

$$\xi^{(a)} \leqslant \hat{\xi}^{(a)} \quad (a \in (\partial X)_e) \qquad (10.2.27)$$

仿定理 3.2.1 的证明易得

引理 10.2.2. 积分方程 (10.2.26) 的最小非负解存在唯一.

由 (10.2.18) 立得

定理 10.2.2.

$$p_{ij}(\lambda) = p_{ij}^{\min}(\lambda) + \int_{(\partial X)_e} h_\lambda(i, da) \times \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(\partial X)_e} V_\lambda^{(n)}(a, db) \sum_{k \in E} \Pi(b, k) p_{kj}^{\min}(\lambda) \quad (i, j \in E) \qquad (10.2.28)$$

定理 10.2.3.

$$p_{ij}(\lambda) = p_{ij}^{\min}(\lambda) + \int_{(\partial X)_e} h_\lambda(i, da)\xi_j^{(a)}(\lambda) \quad (i, j \in E) \qquad (10.2.29)$$

其中

$$\xi_j^{(a)}(\lambda) = \sum_{k \in E} \Pi(a, k) p_{kj}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(x(t + \tau_1) = j \mid x(\tau_1 - 0) = a) dt \quad (a \in (\partial X)_e) \qquad (10.2.30)$$

是积分方程

$$\xi^{(a)} = \int_{(\partial X)_e} \left(\sum_{i \in E} \Pi(a, i) h_\lambda(i, db) \right) \xi^{(b)} + \sum_{k \in E} \Pi(b, k) p_{kj}^{\min}(\lambda) \quad (a \in (\partial X)_e) \qquad (10.2.31)$$

的最小非负解.

证. 由 (10.2.28) 得

$$\xi_j^{(a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(\partial X)_e} V_\lambda^{(n)}(a, db) \sum_{k \in E} \Pi(b, k) p_{kj}^{\min}(\lambda)$$

$$(a \in (\partial X)_e) \tag{10.2.32}$$

由(10.2.20)和(10.2.32)并仿定理3.2.1和定理3.7.1的证明易知 $\xi_j^{(a)}(\lambda)$ $(a \in (\partial X)_e)$ 是积分方程(10.2.31)的最小非负解. 于是由(10.2.28)和(10.2.32)得

$$\xi_j^{(a)}(\lambda) = \int_{(\partial X)_e} \left(\sum_{i \in E} \Pi(a, i) h_\lambda(i, db) \right) \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(\partial X)_e} V_\lambda^{(n)}(b, dc)$$

$$\times \sum_{k \in E} \Pi(c, k) p_{kj}^{\min}(\lambda)$$

$$+ \sum_{i \in E} \Pi(a, i) p_{ij}^{\min}(\lambda)$$

$$= \sum_{i \in E} \Pi(a, i) \Big(p_{ij}^{\min}(\lambda) + \int_{(\partial X)_e} h_\lambda(i, db)$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(\partial X)_e} V_\lambda^{(n)}(b, dc) \sum_{k \in E} \Pi(c, k) p_{kj}^{\min}(\lambda) \Big)$$

$$= \sum_{i \in E} \Pi(a, i) p_{ij}(\lambda) \quad (a \in (\partial X)_e) \tag{10.2.33}$$

取 $\Delta \in \mathscr{B}_e$, 以 $P_{x(\tau_1-0)}$ 表示 $x(\tau_1 - 0)$ 的分布,于是有

$$\int_\Delta P(x(t + \tau_1) = j, x(\tau_1) = k \mid x(\tau_1 - 0) = a) P_{x(\tau_1-0)}(da)$$

$$= \int_\Delta P(x(\tau_1) = k \mid x(\tau_1 - 0) = a) P(x(t + \tau_1)$$

$$= j \mid x(\tau_1 - 0) = a, x(\tau_1) = k) P_{x(\tau_1-0)}(da)$$

$$= \int_\Delta \Pi(a, k) P(x(t) = j \mid x(0) = k) P_{x(\tau_1-0)}(da)$$

$$= \int_\Delta \Pi(a, k) P_{kj}(t) p_{x(\tau_1-0)}(da) \tag{10.2.34}$$

由 Δ 的任意性得

$$P(x(t + \tau_1) = j, x(\tau_1) = k \mid x(\tau_1 - 0) = a)$$

$$= \Pi(a,k) p_{kj}(t) \quad (a \in (\partial X)_e) \tag{10.2.35}$$

于是

$$P(x(t+\tau_1)=j\mid x(\tau_1-0)=a)$$
$$=\sum_{k\in E}P(x(t+\tau_1)=j,\ x(\tau_1)=k\mid x(\tau_1-0)=a)$$
$$=\sum_{k\in E}\Pi(a,k)p_{kj}(t) \tag{10.2.36}$$

由(10.2.33)和(10.2.36)立得(10.2.30)，从而定理得证.

§10.3. 第一次到达时间的分布和矩

引理 10.3.1. 设 $\Lambda\in\mathscr{B}_{[0,\tau_1)}$，则

$$P_i(\Lambda,\ x(\tau_1)\in A)=\int_{(\partial X)_e}\Pi(b,A)P_i(\Lambda,\ x(\tau_1-0)\in db) \tag{10.3.1}$$

其中 $\mathscr{B}_{[0,\tau_1)}=\mathscr{F}\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_{[0,\tau^{(n)}]}\right\}$，而 $\mathscr{B}_{[0,\tau^{(n)}]}=\mathscr{F}\{x_t,t\leqslant\tau^{(n)}\}$.

证. 分下列三步证明.

(1) 试证

$$P_i(x(\tau_1)\in A)=\int_{(\partial X)_e}\Pi(b,A)h(i,db) \tag{10.3.2}$$

注意[14]的公式(5.9)与(5.10)之间的陈述及[14]的公式(5.9)得

$$P_i(\tau_1\leqslant t,\ x(\tau_1)\in A)$$
$$=\int_{(\partial X)_e}\Pi(b,A)P_i(\tau_1\leqslant t,\ x(\tau_1-0)\in db) \tag{10.3.3}$$

在(10.3.3)中令 $t\uparrow+\infty$ 得

$$P_i(\tau_1<+\infty,\ x(\tau_1)\in A)$$
$$=\int_{(\partial X)_e}\Pi(b,A)P_i(\tau_1<+\infty,\ x(\tau_1-0)\in db) \tag{10.3.4}$$

但

$$(x(\tau_1)\in A)\subset(\tau_1<+\infty) \tag{10.3.5}$$

及

$$(x(\tau_1-0)\in(\partial X)_e)\subset(\tau_1<+\infty) \tag{10.3.6}$$

(2) 试证

$$P_i(\hat{\Lambda},\ x(\tau_1)\in A)$$
$$=\int_{(\partial X)_e}\Pi(b,\ A)P_i(\hat{\Lambda},\ x(\tau_1-0)\in db) \quad (10.3.7)$$

其中 $\hat{\Lambda}\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_{[0,\tau^{(n)}]}$.

由 $\hat{\Lambda}$ 之定义知,存在 $n>0$, 使 $\hat{\Lambda}\in\mathscr{B}_{[0,\tau^{(n)}]}$. 注意

$$\theta_{\tau^{(n)}}(x(\tau_1)\in A)=(x(\tau_1)\in A) \quad (10.3.8)$$

其中 $\theta_{\tau^{(n)}}$ 是 [6] 中定义的推移算子. 由 (10.3.8), 强马氏性以及齐次性得

$$P_i(x(\tau_1)\in A\mid\hat{\Lambda},x(\tau^{(n)})=j)=P_j(x(\tau_1)\in A) \quad (10.3.9)$$
$$P_i(x(\tau_1-0)\in db\mid\hat{\Lambda},\ x(\tau^{(n)})=j)$$
$$=P_j(x(\tau_1-0)\in db) \quad (10.3.10)$$

由 (10.3.2) 及 (10.3.3) 得

$$P_i(\hat{\Lambda},\ x(\tau_1)\in A)=\sum_{j\in E}P_i(\hat{\Lambda}x(\tau^{(n)})=j,\ x(\tau_1)\in A)$$
$$=\sum_{j\in E}P_i(\hat{\Lambda},\ x(\tau^{(n)})=j)P_i(x(\tau_1)\in A\mid\hat{\Lambda},\ x(\tau^{(n)})=j)$$
$$=\sum_{j\in E}P_i(\hat{\Lambda},\ x(\tau^{(n)})=j)P_j(x(\tau_1)\in A)$$
$$=\sum_{j\in E}P_i(\hat{\Lambda},x(\tau^{(n)})=j)\int_{(\partial X)_e}\Pi(b,A)P_j(x(\tau_1-0)\in db)$$
$$=\int_{(\partial X)_e}\Pi(b,\ A)\sum_{j\in E}P_i(\hat{\Lambda},\ x(\tau^{(n)})=j)$$
$$\times P_i(x(\tau_1-0)\in db\mid\hat{\Lambda},\ x(\tau^{(n)}=j)$$
$$=\int_{(\partial X)_e}\Pi(b,\ A)\sum_{j\in E}P_i(\hat{\Lambda},\ x(\tau^{(n)}=j),\ x(\tau_1-0)\in db)$$
$$=\int_{(\partial X)_e}\Pi(b,\ A)P_i(\hat{\Lambda},\ x(\tau_1-0)\in db) \quad (10.3.11)$$

于是 (10.3.7) 获证.

(3) 试证 (10.3.1)

设

$$\mathscr{W} = (A: A \text{ 使 } (10.3.1) \text{ 成立}) \tag{10.3.12}$$

于是由(2)知

$$\mathscr{W} \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_{[0,\tau^{(n)}]} \tag{10.3.13}$$

但易证，$\mathscr{W}$ 是 Λ-系，而由 $\mathscr{B}_{[0,\tau^{(n)}]} \subseteq \mathscr{B}_{[0,\tau^{(n+1)}]}$ $(n \geqslant 1)$ 知 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_{[0,\tau^{(n)}]}$ 是 Π-系，于是由(10.3.13)及[21，引理1.1]知

$$\mathscr{W} \supseteq \mathscr{F}\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_{[0,\tau^{(n)}]}\right\} = \mathscr{B}_{[0,\tau_1]} \tag{10.3.14}$$

从而(10.3.1)得证.

定理证明完毕.

引理 10.3.2. 设 $\Delta \in \mathscr{B}_e$，则

$$P_i(x(\tau_1 - 0) \in \Delta,\ x(\tau_1) \in A) = \int_{\Delta} \Pi(b,\ A) h(i,\ db) \tag{10.3.15}$$

证. 由 $(x(\tau_1 - 0) \in \Delta) \in \mathscr{B}_{[0,\tau_1]}$ 及引理 10.3.1 得

$$\begin{aligned} &P_i(x(\tau_1 - 0) \in \Delta,\ x(\tau_1) \in A) \\ &= \int_{(\partial X)_e} \Pi(b,\ A) P_i(x(\tau_1 - 0) \in \Delta,\ x(\tau_1 - 0) \in db) \\ &= \int_{(\partial X)_e \cap \Delta} \Pi(b,\ A) P_i(x(\tau_1 - 0) \in db) \\ &= \int_{\Delta} \Pi(b,\ A) h(i,\ db) \end{aligned} \tag{10.3.16}$$

于是引理 10.3.2 得证.

设 D 是 E 的非空子集，$B \in B_e$. 令

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{iD}^{*(B)} = P_i(&\text{存在 } s,\ \tau^{(1)} \leqslant s < \tau_1, \\ &\text{使 } x_s \in D,\ x(\tau_1 - 0) \in B) \end{aligned} \tag{10.3.17}$$

$$\tilde{g}_{iD}^{(B)}(t) = P_i(x_s \overline{\in} D, \tau^{(1)} \leqslant s < \tau_1, x(\tau_1 - 0) \in B, \tau_1 \leqslant t) \tag{10.3.18}$$

$$\widetilde{G}_{iD}^{(B)}(\lambda) = \int_{-0}^{\infty} e^{-\lambda t} d\tilde{g}_{iD}^{(B)}(t) \quad (\lambda \geqslant 0) \tag{10.3.19}$$

$$\widetilde{G}_{iD}^{*(B)} = \widetilde{G}_{iD}^{(B)}(0) \tag{10.3.20}$$

$$\widetilde{L}_{iD}^{(B,p)} = \int_{-0}^{\infty} t^p d\tilde{g}_{iD}^{(B)}(t) \tag{10.3.21}$$

从而

$$\tilde{L}_{iD}^{(B,0)} = \tilde{G}_{iD}^{*(B)} = h(i, B) - \tilde{f}_{iD}^{*(B)} \qquad (10.3.22)$$

引理 10.3.3. $\{\tilde{f}_{iD}^{*(B)}, i \in E\}$ 是拟规格方程

$$x_i = \sum_{j \in D \cup \{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j + \sum_{j \in D \setminus \{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i} h(j, B), \quad (i \in E) \qquad (10.3.23)$$

的最小非负解.

证. 注意 $(x(\tau_1 - 0) \in B)$ 是一个可推集, 在定理 9.7.2 中令 $v(i) \equiv 1 (i \in E)$, $A = (x(\tau_1 - 0) \in B)$, $H \neq \phi$, $D = A$, 立得本引理.

引理 10.3.4. 对于 $\lambda > 0$, $\{h(i, B) - \tilde{f}_{iD}^{*(B)} - \tilde{G}_{iD}^{(B)}(\lambda), i \in E\}$ 是拟规格方程

$$x_i = \sum_{j \in D \cup \{i\}} \frac{q_{ij}}{\lambda + q_i} x_j + \frac{\lambda(h(i, B) - \tilde{f}_{iD}^{*(B)})}{\lambda + q_i} \quad (i \in E) \ (10.3.24)$$

的最小非负解.

证. 在定理 9.6.6 中令 $v(i) \equiv 1 \ (i \in E)$, $A = D$, $\Delta = \Omega$, 立得我们的引理.

引理 10.3.5.

$\{\tilde{L}_{iD}^{(B,p)}, i \in E\}$ $(p \geqslant 1)$ 是第一型囿壹方程

$$x_i = \sum_{j \in D \cup \{i\}} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j + \frac{p}{q_i} \tilde{L}_{iD}^{(B,p-1)}, \quad (i \in E) \qquad (10.3.25)$$

的最小非负解.

证. 由定理 9.6.6 立得我们的引理.

引理 10.3.6.

$$p_i(\tau_1 \leqslant t, x_s \bar{\in} A \cup H, \tau^{(1)} \leqslant s < \tau_1, x(\tau_1) = j)$$
$$= \int_{(\partial X)_e} \tilde{g}_{i,A\cup H}^{(da)}(t) \Pi(a, j) \quad (i \in E) \qquad (10.3.26)$$

证. 由引理 10.3.1 立得此引理.

下面我们以 ${}_H\tilde{f}_{iA}(t)$, $\tilde{\Phi}_{iA}(\lambda)$, ${}_H\tilde{f}_{iA}^{*}$ 及 ${}_H\tilde{m}_{iA}^{(p)}$ 分别代替 § 9.3 中引入的记号 ${}_Hf_{iA}(t)$, ${}_H\Phi_{iA}(\lambda)$, ${}_Hf_{iA}^{*}$ 及 ${}_Hm_{iA}^{(p)}$. 而 ${}_H\sigma_A$, ${}_Hf_{iA}(t)$, ${}_H\Phi_{iA}(\lambda)$, ${}_Hf_{iA}^{*}$ 及 ${}_Hm_{iA}^{(p)}$ 则让给我们现在研究的一阶 Q 过程用.

以 $\tau_1(\omega)$ 表示 $x(\cdot, \omega)$ 的第一个飞跃点, 如 $\tau_1(\omega) = \sigma(\omega)$,

则令$\tau_2(\omega)=\sigma(\omega)$，否则以$\tau_2(\omega)$表示$\tau_1(\omega)$后的第一个飞跃点；设$\tau_{k-1}(\omega)$已定义，若$\tau_{k-1}(\omega)=\sigma(\omega)$，则令$\tau_k(\omega)=\sigma(\omega)$，否则以$\tau_k(\omega)$表示$\tau_{k-1}(\omega)$后的第一个飞跃点，易证，$\tau_k(\omega)(k=1,2,\cdots)$有定义，且

$$\lim_{k\to\infty}\tau_k(\omega)=\sigma(\omega)\quad(\omega\in\Omega)\tag{10.3.27}$$

如$\tau_{n+1}(\omega)>\tau_n(\omega)$，则以$\tau^{(n,m)}(\omega)$表示$x(\cdot,\omega)$的在$\tau_n(\omega)$后的第$m$个跳跃点，否则令$\tau^{(n,m)}(\omega)=\tau_n(\omega)$. 易知$\tau^{(n,m)}(\omega)$有定义.

A和H都是E的子集，且$A\neq\varnothing$. 令

$$\sigma_A=\begin{cases}\inf(t:\tau^{(0,1)}\leqslant t<\sigma,\ x_t\in A)\\ +\infty,\quad \text{如上集合空.}\end{cases}\tag{10.3.28}$$

$$_H\sigma_A=\begin{cases}\sigma_A, & \text{如 }\sigma_A\leqslant\sigma_H\\ +\infty, & \sigma_A>\sigma_H\end{cases}\tag{10.3.29}$$

$$_Hf_{iA}^{(n)}(t)=P_i(_H\sigma_A\leqslant t,\ \tau^{(n-1,1)}\leqslant{_H\sigma_A}<\tau^{(n,1)})$$
$$(n\geqslant 1)\tag{10.3.30}$$

$$_Hf_{iA}(t)=P_i(_H\sigma_A\leqslant t)\tag{10.3.31}$$

$$_H\Phi_{iA}^{(n)}(\lambda)=\int_{-0}^{\infty}e^{-\lambda t}d_Hf_{iA}^{(n)}(t)\quad(n\geqslant 1,\ \lambda\geqslant 0)\tag{10.3.32}$$

$$_H\Phi_{iA}(\lambda)=\int_{-0}^{\infty}e^{-\lambda t}d_Hf_{iA}(t)\quad(\lambda\geqslant 0)\tag{10.3.33}$$

$$_Hm_{iA}^{(n,p)}=\int_{-0}^{\infty}t^p d_Hf_{iA}^{(n)}(t)\quad(n\geqslant 1,\ p\geqslant 0)\tag{10.3.34}$$

$$_Hm_{iA}^{(p)}=\int_{-0}^{\infty}t^p d_Hf_{iA}(t)\quad(p\geqslant 0)\tag{10.3.35}$$

显然有

$$_Hf_{iA}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}{_Hf_{iA}^{(n)}(t)}\tag{10.3.36}$$

$$_H\Phi_{iA}(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}{_H\Phi_{iA}^{(n)}(\lambda)}\tag{10.3.37}$$

$$_Hm_{iA}^{(p)}=\sum_{n=1}^{\infty}{_Hm_{iA}^{(n,p)}}\tag{10.3.38}$$

有时把$_Hm_{iA}^{(0)}$，$_Hm_{iA}^{(1)}$分别记为$_Hf_{iA}^*$和$_Hm_{iA}$.

引理 10.3.7. ${}_Hf_{iA}^{(n)}(t)$ 由次之递推公式唯一决定：

$$
{}_Hf_{iA}^{(1)}(t) = {}_H\tilde{f}_{iA}(t) + \sum_{j\in A}\int_{(\partial X)_e} \tilde{g}_{i,A\cup H}^{(da)}(t)\Pi(a,j) \quad (i\in E) \tag{10.3.39}
$$

$$
{}_Hf_{iA}^{(n+1)}(t) = \sum_{j\in A\cup H}\int_{-0}^{t} {}_Hf_{jA}^{(n)}(t-u)d\int_{(\partial X)_e} \tilde{g}_{i,A\cup H}(u)\Pi(a,j)
$$

$$
(i\in E, n\geqslant 1) \tag{10.3.40}
$$

证. 由引理 10.3.6 及

$$
\begin{aligned}
{}_Hf_{iA}^{(1)}(t) &= P_i({}_H\sigma_A\leqslant t,\ \tau^{(0,1)}\leqslant {}_H\sigma_A<\tau^{(1,1)}) \\
&= P_i({}_H\sigma_A\leqslant t,\ \tau^{(0,1)}\leqslant {}_H\sigma_A<\tau_1) \\
&\quad + P_i({}_H\sigma_A\leqslant t,\ {}_H\sigma_A=\tau_1) \\
&= P_i({}_H\sigma_A\leqslant t) + \sum_{j\in A} P_i(\tau_1\leqslant t,\ x_s\bar{\in} A\cup H, \\
&\quad \tau^{(0,1)}\leqslant s<\tau_1,\ x(\tau_1)=j)
\end{aligned}
$$

立得(10.3.39).

由强马氏性、齐次性，引理 10.3.6 以及引理 9.3.2 得

$$
\begin{aligned}
{}_Hf_{iA}^{(n+1)}(t) &= \sum_{j\in A\cup H} P_i({}_H\sigma_A\leqslant t, \tau^{(n,1)}\leqslant {}_H\sigma_A \\
&\quad <\tau^{(n+1,1)},\ x(\tau_1)=j) \\
&= \sum_{j\in A\cup H} P_i(x_s\bar{\in} A\cup H,\ \tau^{(0,1)}\leqslant s<\tau_1,\ {}_H\sigma_A\leqslant t, \\
&\quad x(\tau_1)=j,\ \tau^{(n,1)}\leqslant {}_H\sigma_A<\tau^{(n+1,1)}) \\
&= \sum_{j\in A\cup H} P_i(x(\tau_1)=j)P_i(x_s\bar{\in} A\cup H,\ \tau^{(0,1)}\leqslant s<\tau_1, \\
&\quad ({}_H\sigma_A-\tau_1)+\tau_1\leqslant t,\ \tau^{(n,1)}-\tau_1\leqslant {}_H\sigma_A \\
&\quad -\tau_1<\tau^{(n+1,1)}-\tau_1 \mid x(\tau)=j) \\
&= \sum_{j\in A\cup H} P_i(x(\tau_1)=j)\int_{-0}^{t} P_i({}_H\sigma_A-\tau_1\leqslant t-u, \\
&\quad \tau^{(n,1)}-\tau_1\leqslant {}_H\sigma_A-\tau_1<\tau^{(n+1,1)} \\
&\quad -\tau_1 \mid x(\tau_1)=j)dP_i(\tau_1\leqslant u,\ x_s\bar{\in} A\cup H, \\
&\quad \tau^{(0,1)}\leqslant s<\tau_1 \mid x(\tau_1)=j)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{j\in A\cup H} \int_{-0}^{t} P_j({}_H\sigma_A \leqslant t-u,\ \tau^{(n-1,1)} \leqslant {}_H\sigma_A$$
$$< \tau^{(n,1)}) dP_i(\tau_1 \leqslant u,\ x_s \bar{\in} A\cup H,\ \tau^{(0,1)}$$
$$\leqslant s < \tau_1,\ x(\tau_1) = j)$$
$$= \sum_{j\in A\cup H} \int_{-0}^{t} {}_H f_{jA}^{(n)}(t-u) d\int_{(\partial X)_e} \tilde{g}_{i,A\cup H}^{(da)}(u) \Pi(a,j)$$

于是 (10.3.40) 获证，定理证毕.

引理 10.3.8.

${}_H\Phi_{iA}^{(n)}(\lambda)$ 由次之递推公式唯一决定:

$${}_H\Phi_{iA}^{(1)}(\lambda) = {}_H\tilde{\Phi}_{iA}^{(n)}(\lambda) + \sum_{j\in A} \int_{(\partial X)_e} \tilde{G}_{i,A\cup H}^{(da)}(\lambda)\Pi(a,j) \quad (i\in E) \tag{10.3.41}$$

$${}_H\Phi_{iA}^{(n+1)}(\lambda) = \sum_{j\in A\cup H} \tilde{G}_{i,A\cup H}^{(da)}(\lambda)\Pi(a,j) {}_H\Phi_{jA}^{(n)}(\lambda) \quad (i\in E,\ n\geqslant 1) \tag{10.3.42}$$

证. 由定理 10.3.7 及引理 9.3.3 立得本定理.

引理 10.3.9.

${}_H m_{iA}^{(n,p)}$ 由次之递推公式唯一决定:

$${}_H m_{iA}^{(1,p)} = {}_H\tilde{m}_{iA}^{(p)} + \sum_{j\in A} \int_{(\partial X)_e} \tilde{L}_{i,A\cup H}^{(da,p)} \Pi(a,j) \quad (i\in E) \tag{10.3.43}$$

$${}_H m_{iA}^{(n+1,p)} = \sum_{l=0}^{p} \sum_{i\in A\cup H} \int_{(\partial X)_e} C_p^l \tilde{L}_{i,A\cup H}^{(da,l)} \Pi(a,j) {}_H m_{jA}^{(n,p-l)}$$
$$(i\in E,\ n\geqslant 1) \tag{10.3.44}$$

证. 由引理 10.3.7 及引理 9.3.4 立得本定理.

定理 10.3.1.

$\{{}_H\Phi_{iA}(\lambda),\ i\in E\}$ 是拟规格方程

$$x_i = \sum_{j\in A\cup H} \int_{(\partial X)_e} G_{i,A\cup H}^{(da)}(\lambda)\Pi(a,j)x_j + {}_H\tilde{\Phi}_{iA}(\lambda)$$
$$+ \sum_{j\in A} \int_{(\partial X)_e} \tilde{G}_{i,A\cup H}^{(da)}(\lambda)\Pi(a,j) \quad (i\in E) \tag{10.3.45}$$

的最小非负解.

证. 易知(10.3.45)是拟规格方程. 由引理 10.3.8 和定理 3.2.1 立得本定理.

定理 10.3.2.

$$
{}_H\Phi_{iA}(\lambda)=\int_{(\partial X)_e}\widetilde{G}^{(da)}_{i,A\cup H}(\lambda)\xi^{(a)}(\lambda)+\int_{(\partial X)_e}\widetilde{G}^{(da)}_{i,A\cup H}(\lambda)\xi^{(a)}_0 + {}_H\widetilde{\Phi}_{iA}(\lambda)\quad(i\in E) \tag{10.3.46}
$$

其中

$$
\xi^{(a)}_0=\sum_{j\in A}\Pi(a,j)\quad(a\in(\partial X)_e) \tag{10.3.47}
$$

而 $\xi^{(a)}_{(\lambda)}$ $(a\in(\partial X)_e)$ 是积分方程

$$
\begin{aligned}
\xi^{(b)}=&\int_{(\partial X)_e}\sum_{i\in A\cup H}\widetilde{G}^{(da)}_{i,A\cup H}(\lambda)\Pi(b,i)\xi^{(a)}\\
&+\int_{(\partial X)_e}\sum_{i\in H}\widetilde{G}^{(da)}_{i,A\cup H}(\lambda)\Pi(b,i)\sum_{j\in A}\Pi(a,j)\\
&+\sum_{i\in A\cup H}{}_H\widetilde{\Phi}^{(\lambda)}_{iA}\Pi(b,i)
\end{aligned} \tag{10.3.48}
$$

的最小非负解.

证. 由定理 10.3.1 知, 只需证明 $\sum_{j\in A\cup H}\Pi(a,j)_H\widetilde{\Phi}_{jA}(\lambda)$, $(a\in(\partial X)_e)$ 是积分方程(10.3.48)的最小非负解. 为此, 令

$$
\left.\begin{aligned}
&x^{(0)}_i=0\\
&x^{(n+1)}_i=\sum_{j\in A\cup H}\int_{(\partial X)_e}\widetilde{G}^{(da)}_{i,A\cup H}(\lambda)\Pi(a,j)x^{(n)}_j+{}_H\widetilde{\Phi}_{iA}(\lambda)\\
&\qquad+\sum_{j\in A}\int_{(\partial X)_e}\widetilde{G}^{(da)}_{i,A\cup H}(\lambda)\Pi(a,j)\\
&\qquad(n\geqslant 1,\ i\in E)
\end{aligned}\right\} \tag{10.3.49}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\overset{(0)}{\xi}{}^{(b)}=0\\
&\overset{(n+1)}{\xi}{}^{(b)}=\int_{(\partial X)_e}\sum_{i\in A\cup H}\widetilde{G}^{(da)}_{i,A\cup H}(\lambda)\Pi(b,i)\overset{(n)}{\xi}{}^{(a)}\\
&\qquad+\int_{(\partial X)_e}\sum_{i\in A\cup H}\widetilde{G}^{(da)}_{i,A\cup H}(\lambda)\Pi(b,i)\sum_{j\in A}\Pi(a,j)\\
&\qquad+\sum_{i\in A\cup H}{}_H\widetilde{\Phi}_{iA}(\lambda)\Pi(b,i)\quad(n\geqslant 1,\ b\in(\partial X)_e)
\end{aligned}\right\} \tag{10.3.50}
$$

于是

$$\sum_{i\in A\cup H}\Pi(b,i)x_i^{(0)}=\sum_{i\in A\cup H}\Pi(b,i)\cdot 0=0=\overset{(0)}{\xi}(b)$$

$$(b\in(\partial X)_e) \tag{10.3.51}$$

今假定

$$\sum_{i\in A\cup H}\Pi(b,i)x_i^{(n)}=\overset{(n)}{\xi}(b)\quad(b\in(\partial X)_e) \tag{10.3.52}$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{i\in A\cup H}\Pi(b,i)x_i^{(n+1)}&=\sum_{i\in A\cup H}\Pi(b,i)\\&\quad\times\left(\sum_{j\in A\cup H}\left(\int_{(\partial X)_e}\tilde{G}^{(da)}_{i,A\cup H}(\lambda)\Pi(a,j)\right)x_j^{(n)}\right.\\&\quad\left.+{}_H\tilde{\Phi}_{iA}(\lambda)\sum_{j\in A}\int_{(\partial X)_e}\tilde{G}^{(da)}_{i,A\cup H}(\lambda)\Pi(a,j)\right)\\&=\int_{(\partial X)_e}\left(\sum_{i\in A\cup H}\tilde{G}^{(da)}_{i,A\cup H}(\lambda)\Pi(b,i)\right)\sum_{j\in A\cup H}\Pi(a,j)x_j^{(n)}\\&\quad+\int_{(\partial X)_e}\left(\sum_{i\in A\cup H}\tilde{G}^{(da)}_{i,A\cup H}(\lambda)\Pi(b,i)\right)\sum_{j\in A}\Pi(a,j)\\&\quad+\sum_{i\in A\cup H}{}_H\tilde{\Phi}_{iA}(\lambda)\\&=\int_{(\partial X)_e}\left(\sum_{i\in A\cup H}\tilde{G}^{(da)}_{i,A\cup H}(\lambda)\Pi(b,i)\right)\overset{(n)}{\xi}(a)\\&\quad+\int_{(\partial X)_e}\left(\sum_{i\in A\cup H}\tilde{G}^{(da)}_{i,A\cup H}(\lambda)\Pi(b,i)\right)\sum_{j\in A}\Pi(a,j)\\&\quad+\sum_{i\in A\cup H}{}_H\tilde{\Phi}_{iA}(\lambda)\quad(b\in(\partial X)_e)\end{aligned} \tag{10.3.53}$$

于是由归纳法知

$$\overset{(n)}{\xi}(b)=\sum_{i\in A\cup H}\Pi(b,i)x_i^{(n)}\quad(b\in(\partial X)_e) \tag{10.3.54}$$

于是，易证

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\overset{(n)}{\xi}(b)&=\sum_{i\in A\cup H}\Pi(b,i)\lim_{n\to\infty}x_i^{(n)}\\&=\sum_{i\in A\cup H}\Pi(b,i)_H\tilde{\Phi}_{iA}(\lambda)\quad(b\in(\partial X)_e)\end{aligned} \tag{10.3.55}$$

且 $\lim_{n\to\infty}\overset{(n)}{\xi}{}^{(b)}(b\in(\partial X)_e)$（即 $\sum_{i\in A\cup H}\Pi(b,i)_H\tilde{\Phi}_{iA}(\lambda)\ (b\in(\partial X)_e)$）是积分方程（10.3.48）的最小非负解。定理证毕。

定理 10.3.3.

$\{_Hf^*_{iA},\ i\in E\}$ 是拟规格方程

$$x_i=\sum_{j\in A\cup H}\int_{(\partial X)_e}\tilde{G}^{*(db)}_{i,A\cup H}\Pi(b,j)x_j+{}_H\tilde{f}^*_{iA}$$
$$+\sum_{j\in A}\int_{(\partial X)_e}\tilde{G}^{*(db)}_{i,A\cup H}\Pi(b,j)\quad(i\in E)\quad(10.3.56)$$

的最小非负解.

证。本定理乃是定理 10.3.1 在 $\lambda=0$ 下之特例.

定理 10.3.4.

$${}_Hf^*_{iA}=\int_{(\partial X)_e}\tilde{G}^{*(da)}_{i,A\cup H}\xi^{*(a)}+\int_{(\partial X)_e}\tilde{G}^{*(da)}_{i,A\cup H}\xi^{(a)}_0+{}_H\tilde{f}^*_{iA}\quad(i\in E)\quad(10.3.57)$$

其中

$$\xi^{*(a)}=\xi^{(a)}(0)\quad(a\in(\partial X)_e)\quad(10.3.58)$$

证。本定理乃是定理 10.3.2 在 $\lambda=0$ 下之特例.

定理 10.3.5. $\{_Hm^{(p)}_{iA},\ i\in E\}$ $(p\geqslant 1)$ 是第一型囿壹方程

$$x_i=\sum_{j\in A\cup H}\int_{(\partial X)_e}\tilde{G}^{*(db)}_{i,A\cup H}\Pi(b,j)x_j+{}_H\tilde{m}^{(p)}_{iA}$$
$$+\sum_{j\in A}\int_{(\partial X)_e}\tilde{L}^{(db,p)}_{i,A\cup H}\Pi(b,j)$$
$$+\sum_{l=1}^{p}\sum_{j\in A\cup H}\int_{(\partial X)_e}C^l_p\tilde{L}^{(db,l)}_{i,A\cup H}\Pi(b,j)_Hm^{(p-l)}_{jA}\quad(i\in E)\quad(10.3.59)$$

的最小非负解.

证。由引理 10.3.9 和系 3.2.2 立得我们的定理.

定理 10.3.6.

$${}_Hm^{(p)}_{iA}=\sum_{l=0}^{p}C^l_p\int_{(\partial X)_e}\tilde{L}^{(da,l)}_{i,A\cup H}\xi^{(a,p-l)}$$
$$+\int_{(\partial X)_e}\tilde{L}^{(da,p)}_{i,A\cup H}\xi^{(a)}_0+{}_H\tilde{m}^{(p)}_{iA}\quad(i\in E)\quad(10.3.60)$$

其中,对于任一$1 \leqslant s \leqslant p$, $\xi^{(a,s)}(a \in (\partial X)_e)$是积分方程

$$\xi^{(b,s)} = \int_{(\partial X)_e} \sum_{i \in A \cup H} \widetilde{G}^{*(da)}_{i,A \cup H} \Pi(b, i) \xi^{(a,s)} + \sum_{l=1}^{p} \int_{(\partial X)_e} \sum_{i \in A \cup H} \widetilde{L}^{(da,l)}_{i,A \cup H} \Pi(b, i) \xi^{(a,s-l)} + \int_{(\partial X)_e} \sum_{i \in A \cup H} \widetilde{L}^{(da,s)}_{i,A \cup H} \Pi(b, i) \xi_0^{(a)} \quad (b \in (\partial X)_e) \tag{10.3.61}$$

的最小非负解.

证. 仿定理 10.3.2 的证明立得我们的定理.

第十一章　任意的 Q 过程

§11.1.　第一构造定理的深化

前两章我们研究了最小 Q 过程和一阶 Q 过程．在此基础上，本章来研究任意的 Q 过程．

在这章里我们将研究三个问题：A）样本函数第一构造定理的深化；B）转移概率；C）过份测度和过份函数的分解定理．而第一次到达时间和积分型泛函以及状态的分类的研究在方法上无新东西，故从略．本节就来研究问题 A)．

定理 11.1.1.　设 $X(\omega)=\{x(t,\omega),\ t<\sigma(\omega)\}$ 是任一 Q 过程，令

$$X^{(n)}(\omega)=g_n(X(\omega)) \tag{11.1.1}$$

则

（1）$X^{(n)}(\omega)=\{x^{(n)}(t,\omega),\ t<\sigma^{(n)}(\omega)\}$ $(n\geqslant 1)$ 是 $(Q,\Pi_{(\partial X)_c\times D_n})$ 过程，且有

$$X^{(n)}(\omega)=g_n(X^{(n+1)}(\omega)) \tag{11.1.2}$$

其中 $\Pi_{(\partial X)_c\times D_n}=(\Pi^{(n)}(a,j),\ a\in(\partial X)_c,\ j\in D_n)$ 如下唯一决定：

$$\Pi^{(n)}(a,j)=P(x(\beta_1^{(n)})=j\,|\,x(\tau_1-0)=a)$$
$$(a\in(\partial X)_c) \tag{11.1.3}$$

关于 D_n, g_n 和 $\beta_1^{(n)}$ 的定义见 §1.2.

（2）矩阵叙列 $\Pi_{(\partial X)_c\times D_n}=(\Pi^{(n)}(a,j),\ a\in(\partial X)_c,\ j\in D_n)$, $(n\geqslant 1)$ 有如下性质：

（i）对固定的 n 和 $j\in D_n$, $\Pi^{(n)}(a,j)(a\in(\partial X)_c)$ 是 β_c 上的 Borel 可测函数．

（ii）对任一 $n\geqslant 1$ 有

$$\Pi^{(n)}(a,j)\geqslant 0(a\in(\partial X)_c,\ j\in D_n) \tag{11.1.4}$$

$$\sum_{j\in D_n}\Pi^{(n)}(a,j)\leqslant 1 \quad (a\in(\partial X)_e) \qquad (11.1.5)$$

(iii) 对任一 $n\geqslant 1$，有

$$\Pi^{(n)}(a,j)=\Pi^{(n+1)}(a,j)+\Pi^{(n+1)}(a,n+1)$$

$$\times\frac{{}_{D_n}\bar{f}^*_{n+1,j}+\int_{(\partial X)_e}(h(n+1,db)-\bar{f}^{*(db)}_{n+1,D_n})\Pi^{(n+1)}(b,j)}{1-\int_{(\partial X)_e}(h(n+1,db)-\bar{f}^{*(db)}_{n+1,D_n})\Pi^{(n+1)}(b,n+1)}$$

$$(a\in(\partial X)_e,\ j\in D_n) \qquad (11.1.6)$$

这里约定 $\frac{0}{0}=0$，其中 ${}_{D_n}\bar{f}^*_{n+1,j}$，$\bar{f}^{*(db)}_{n+1,D_n}$ 的定义如 §10.3.

(3) 在 $[0,\sigma(\omega))$ 上有

$$\lim_{n\to\infty}x^{(n)}(t,\omega)=x(t,\omega)\quad(\omega\in\Omega) \qquad (11.1.7)$$

(4)

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=p_{ij}(t)\quad(i,j\in E,\ t\geqslant 0) \qquad (11.1.8)$$

其中

$$p_{ij}(t)=P(x(t)=j\mid x(0)=i)\quad(i,j\in E,\ t\geqslant 0) \qquad (11.1.9)$$

$$p_{ij}^{(n)}(t)=P(x^{(n)}(t)=j\mid x^{(n)}(0)=i)$$
$$(i,j\in E,\ t\geqslant 0) \qquad (11.1.10)$$

证. 由定理 1.5.1 知(1)和(3)真. 由(3)易知(参看[2, 定理 6.3]的证明)(4)真. (11.1.4)和(11.1.5)显见成立. 故只需证明(11.1.6)成立.

令

$$\sigma_A^{(n)}=\begin{cases}\inf(t:\tau^{(1)}\leqslant t<\sigma^{(n)},\ x_n(t)\in A)\\ +\infty, \quad \text{如 } \sigma_A^{(n)} \text{ 集合空}\end{cases} \qquad (11.1.11)$$

$${}_H\sigma_A^{(n)}=\begin{cases}\sigma_A^{(n)}, & \text{如 } \sigma_A^{(n)}\leqslant\sigma_H^{(n)}\\ +\infty & \text{如 } \sigma_A^{(n)}>\sigma_H^{(n)}\end{cases} \qquad (11.1.12)$$

$${}_Hf_{iA}^{*(n)}=p_i({}_H\sigma_A^{(n)}<+\infty) \qquad (11.1.13)$$

由定理 10.3.3 得

$${}_{D_n}f^{*(n+1)}_{n+1,j}=\int_{(\partial X)_e}(h(n+1,db)-\bar{f}^{*(db)}_{n+1,D_n})\Pi^{(n+1)}(b,n+1)$$

$$\times {}_{D_n}f_{n+1,j}^{*(n+1)} + {}_{D_n}\bar{f}_{n+1,j}^{*}$$
$$+ \int_{(\partial X)_e} (h(n+1, db) - \bar{f}_{n+1,D_n}^{*(db)}) \Pi^{(n+1)}(b, j)$$
$$(j \in D_n) \tag{11.1.14}$$

于是

$$ {}_{D_n}f_{n+1,j}^{*} = \frac{{}_{D_n}\bar{f}_{n+1,j}^{*} + \int_{(\partial X)_e} (h(n+1, db) - \bar{f}_{n+1,D_n}^{*(db)}) \Pi^{(n+1)}(b, j)}{1 - \int_{(\partial X)_e} (h(n+1, db) - \bar{f}_{n+1,D_n}^{*(db)}) \Pi^{(n+1)}(b, n+1)}$$
$$(j \in D_n) \tag{11.1.15}$$

设 $\Delta \in B_e$, 注意

$$x^{(n)}(t, \omega) = x(t, \omega)$$
$$(n = 1, 2, \cdots; 0 \leqslant t < \tau_1(\omega)) \tag{11.1.16}$$

对任一 $j \in D_n$, 显见有

$$P_i(x^{(n)}(\tau_1) = j,\ x^{(n)}(\tau_1 - 0) \in \Delta)$$
$$= P_i(x^{(n+1)}(\tau_1) = j,\ x^{(n+1)}(\tau_1 - 0) \in \Delta)$$
$$+ P_i(x^{(n+1)}(\tau_1) = j, x^{(n+1)}(\tau_1 - 0) \in \Delta$$
$$\text{存在 } s,\ \tau_{n+1}^{(1,1)} \leqslant s < \sigma^{(n+1)} \text{ 使 } x^{(n+1)}(s) = j$$
$$\text{而 } x^{(n+1)}(t) \bar{\in} D_n,\ \tau^{(1,1)} \leqslant t < s) \tag{11.1.17}$$

其中 $\tau_{n+1}^{(1,1)}(\omega)$ 是 $X_{n+1}(\omega)$ 的 $\tau_1(\omega)$ 后第一个跳跃点, 如 $\tau_1(\omega) < \sigma^{(n+1)}(\omega)$; 否则 $\tau_{n+1}^{(1,1)}(\omega) = \sigma^{(n+1)}(\omega)$. 由(11.1.16)及引理 10.3.2 知

$$P_i(x^{(n)}(\tau_1) = j,\ x^{(n)}(\tau_1 - 0) \in \Delta)$$
$$= \int_\Delta h(i, da) \Pi^{(n)}(a, j) \tag{11.1.18}$$

及

$$P_i(x^{(n+1)}(\tau_1) = j,\ x^{(n+1)}(\tau_1 - 0) \in \Delta)$$
$$= \int_\Delta h(i, da) \Pi^{(n+1)}(a, j) \tag{11.1.19}$$

由强马氏性,齐次性以及引理 10.3.2, 易得

$$P_i(x^{(n+1)}(\tau_1) = n+1, x^{(n+1)}(\tau_1 - 0) \in \Delta$$

存在 s, $\tau_{n+1}^{(1,1)} \leqslant s < \sigma^{(n+1)}$, 使 $x^{(n+1)}(s) = j$,

而 $x^{(n+1)}(t) \bar{\in} D_n$, $\tau_{n+1}^{(1,1)} \leqslant t < s$)

$$= \int_{\Delta} h(i, da) \Pi^{(n+1)}(a, n+1) \cdot {}_{D_n}f_{n+1,j}^{*} \tag{11.1.20}$$

由 (11.1.17)—(11.1.20) 得

$$\int_{\Delta} (\Pi^{(n)}(a, j) - \Pi^{(n+1)}(a, j) - \Pi^{(n+1)}(a, n+1)_{D_n}f_{n+1,j}^{*(n+1)})$$

$$\times h(i, da) = 0, \quad (i \in E) \tag{11.1.21}$$

由 $\Delta \in B_e$ 的任意性,积分的绝对连续性及 (11.1.21) 得

$$\Pi^{(n)}(a, j) = \Pi^{(n+1)}(a, j) + \Pi^{(n+1)}(a, n+1) \cdot {}_{D_n}f_{n+1,j}^{*(n+1)} \tag{11.1.22}$$

由 (11.1.15) 及 (11.1.22) 立得 (11.1.14), 于 (11.1.6) 获证. 定理证毕.

定理 11.1.2. 若 (11.1.4) 和 (11.1.5) 成立,则 (11.1.6) 成立的充要条件是次之等式成立:

$$\Pi^{(n+1)}(a, j) = \Pi^{(n)}(a, j) - \Pi^{(n+1)}(a, n+1) \cdot {}_{D_n}\bar{f}_{n+1,j}^{*}$$

$$- \Pi^{(n+1)}(a, n+1) \int_{(\partial X)_e} (h(n+1, db)$$

$$- \bar{f}_{n+1,D_n}^{*(db)}) \Pi^{(n)}(b, j) \quad (a \in (\partial X)_e, j \in D_n) \tag{11.1.23}$$

证. (A) 必要性

设 (11.1.6) 成立,作方程

$$X = \int_{(\partial X)_e} (h(n+1, db) - \bar{f}_{n+1,D_n}^{*(db)}) \Pi^{(n+1)}(b, n+1) X + {}_{D_n}\bar{f}_{n+1,j}^{*}$$

$$+ \int_{(\partial X)_e} (h(n+1, db) - \bar{f}_{n+1,D_n}^{*(db)}) \Pi^{(n+1)}(b, j) \tag{11.1.24}$$

于是

$$X = \frac{{}_{D_n}\bar{f}_{n+1,j}^{*} + \int_{(\partial X)_e} (h(n+1, db) - \bar{f}_{n+1,D_n}^{*(db)}) \Pi^{(n+1)}(b, j)}{1 - \int_{(\partial X)_e} (h(n+1, db) - \bar{f}_{n+1,D_n}^{*(db)}) \Pi^{(n+1)}(b, n+1)} \tag{11.1.25}$$

由 (11.1.6) 和 (11.1.25) 得

$$\Pi^{(n)}(a, j) = \Pi^{(n+1)}(a, j) + \Pi^{(n+1)}(a, n+1) X \quad (j \in D_n) \tag{11.1.26}$$

把 (11.1.24) 代入 (11.1.26) 得

$$\Pi^{(n)}(a,j)=\Pi^{(n+1)}(a,j)+\Pi^{(n+1)}(a,n+1)$$
$$\times\int_{(\partial X)_e}(h(n+1,db)-\mathcal{J}^{*(db)}_{n+1,D_n})\Pi^{(n+1)}(b,n+1)X$$
$$+\Pi^{(n+1)}(a,n+1)_{D_n}\mathcal{J}^{*}_{n+1,j}+\Pi^{(n+1)}(a,n+1)$$
$$\times\int_{(\partial X)_e}(h(n+1,db)-\mathcal{J}^{*(db)}_{n+1,D_n})\Pi^{(n+1)}(b,j),$$
$$(j\in D_n)\qquad(11.1.27)$$

但

$$\Pi^{(n+1)}(a,j)=\Pi^{(n)}(a,j)-\Pi^{(n+1)}(a,n+1)_{D_n}\mathcal{J}^{*}_{n+1,j}$$
$$-\Pi^{(n+1)}(a,n+1)\left[\int_{(\partial X)_e}(h(n+1,db)-\mathcal{J}^{*(db)}_{n+1,D_n})\right.$$
$$\left.\times(\Pi^{(n+1)}(b,j)+\Pi^{(n+1)}(b,n+1)X)\right],$$
$$(j\in D_n)\qquad(11.1.28)$$

但

$$\Pi^{(n)}(b,j)=\Pi^{(n+1)}(b,j)$$
$$+\Pi^{(n+1)}(b,n+1)X,\quad(j\in D_n)\qquad(11.1.29)$$

由(11.1.29)得

$$\int_{(\partial X)_e}(h(n+1,db)-\mathcal{J}^{*(db)}_{(n+1),D_n})\Pi^{(n)}(b,j)$$
$$=\int_{(\partial X)_e}(h(n+1,db)-\mathcal{J}^{*(db)}_{n+1,D_n})(\Pi^{(n+1)}(b,j)$$
$$+\Pi^{(n+1)}(b,n+1)X),\quad(j\in D_n)\qquad(11.1.30)$$

把(11.1.30)代入(11.1.28)立得(11.1.23).

(B) 充分性

设(11.1.23)成立,于是,有

$$\Pi^{(n)}(a,j)=\Pi^{(n+1)}(a,j)+\Pi^{(n+1)}(a,n+1)$$
$$\times\left[{}_{D_n}\mathcal{J}^{*}_{n+1,j}+\int_{(\partial X)_e}(h(n+1,db)\right.$$
$$\left.-\mathcal{J}^{*(db)}_{n+1,D_n})\Pi^{n}(a,j)\right]\quad(j\in D_n)\qquad(11.1.31)$$

由(11.1.31)得

$$\int_{(\partial X)_c}(h(n+1,da)-\tilde{f}^{*(da)}_{n+1,D_n})\Pi^{(n)}(a,j)$$
$$=\int_{(\partial X)_c}(h(n+1,da)-\tilde{f}^{*(da)}_{n+1,D_n})\Pi^{(n+1)}(a,j)$$
$$+\int_{(\partial X)_c}(h(n+1,da)-\tilde{f}^{*(da)}_{n+1,D_n})\Pi^{(n+1)}(a,n+1)_{D_n}\tilde{f}^{*}_{n+1,j}$$
$$+\left[\int_{(\partial X)_c}(h(n+1,da)-\tilde{f}^{*(da)}_{n+1,D_n})\Pi^{(n+1)}(a,n+1)\right]$$
$$\times\left[\int_{(\partial X)_c}(h(n+1,db)-\tilde{f}^{*(db)}_{n+1,D_n})\Pi^{(n)}(b,j)\right],$$
$$(j\in D_n) \tag{11.1.32}$$

即

$$\int_{(\partial X)_c}(h(n+1,db)-\tilde{f}^{*(db)}_{n+1,D_n})\Pi^{(n)}(b,j)$$
$$=\int_{(\partial X)_c}(h(n+1,db)-\tilde{f}^{*(db)}_{n+1,D_n})\Pi^{(n+1)}(b,j)$$
$$+\int_{(\partial X)_c}(h(n+1,db)-\tilde{f}^{*(db)}_{n+1,D_n})\Pi^{(n+1)}(b,n+1)_{D_n}\tilde{f}^{*}_{n+1,j}$$
$$+\left[\int_{(\partial X)_c}(h(n+1,db)-\tilde{f}^{*(db)}_{n+1,D_n})\Pi^{(n+1)}(b,n+1)\right]$$
$$\times\left[\int_{(\partial X)_c}(h(n+1,db)-\tilde{f}^{*(db)}_{n+1,D_n})\Pi^{(n)}(b,j)\right],$$
$$(j\in D_n) \tag{11.1.33}$$

于是

$$\int_{(\partial X)_c}(h(n+1,db)-\tilde{f}^{*(db)}_{n+1,D_n})\Pi^{(n)}(b,j)$$
$$=\left[\int_{(\partial X)_c}(h(n+1,db)-\tilde{f}^{*(db)}_{n+1,D_n})\Pi^{(n+1)}(b,j)\right.$$
$$\left.+\int_{(\partial X)_c}(h(n+1,db)-\tilde{f}^{*(db)}_{n+1,D_n})\Pi^{(n+1)}(b,n+1)_{D_n}\tilde{f}^{*}_{n+1,j}\right]\Big/$$
$$\left[1-\int_{(\partial X)_c}(h(n+1,db)-\tilde{f}^{*(db)}_{n+1,D_n})\Pi^{(n+1)}(b,n+1)\right],$$
$$(j\in D_n) \tag{11.1.34}$$

把(11.1.34)代入(11.1.31)，立得(11.1.6).

定理获证.

§ 11.2. 转移概率

令

$$\Pi^{(n)}(a, n) = \Pi(a, n) \quad (n = 1, 2, \cdots) \qquad (11.2.1)$$

由定理 11.1.1 知，$P(t) = (p_{ij}(t), i, j \in E)$ 由 $P^{(n)}(t) = (p_{ij}^{(n)}(t), i, j \in E)$ 唯一决定，由定理 10.2.1 知 $P^{(n)}(t)(n \geqslant 1)$ 由 Q 和 $\Pi_{(\partial X)_e} \times D_n$ $(n \geqslant 1)$ 唯一决定，而由定理 11.1.2 易知，$\Pi_{(\partial X)_e} \times D_n (n = 1, 2, \cdots)$ 由 Q 和 $\Pi_{(\partial X)_e \times E} = (\Pi(a, n), a \in (\partial X)_e, n \in E)$ 唯一决定. 从而 $P(t)$ 由 Q 和 $\Pi_{(\partial X)_e \times E}$ 唯一决定. 故引入

定义 11.1.1. 设 $X(\omega) = \{x(t, \omega), t < \sigma(\omega)\}$ 是一 Q 过程，若

$$\Pi(a, n) = P(x(\beta_1^{(n)}) = n \mid X(\tau - 0) = a) \qquad (11.2.2)$$

则称 $\Pi_{(\partial X)_e \times E} = (\Pi(a, n), a \in (\partial X)_e, n \in E)$ 为 $X(\omega)$ 的特征矩阵. 而 $X(\omega)$ 又称为 $[Q, \Pi_{(\partial X)_e \times E}]$ 过程.

令

$$p_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_{ij}(t) dt \qquad (11.2.3)$$

$$p_{ij}^{(n)}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_{ij}^{(n)}(t) dt \qquad (11.2.4)$$

定理 11.2.1. 设 $X(\omega)$ 为 $[Q, \Pi_{(\partial X)_e \times E}]$ 过程，则

$$p_{ij}(\lambda) = p_{ij}^{\min}(\lambda) + \int_{(\partial X)_e} h_\lambda(i, da) \xi_j^{(a)}(\lambda) \quad (i, j \in E) \qquad (11.2.5)$$

其中

$$\xi_j^{(a)}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(x(t + \tau) = j \mid x(\tau - 0) = a) dt = \lim_{n \to \infty} \xi_j^{(n,a)}(\lambda) \quad (a \in (\partial X)_e, j \in E) \qquad (11.2.6)$$

而 $\{\xi_j^{(n,a)}(\lambda), a \in (\partial X)_e\}$ 是积分方程

$$\xi^{(a)} = \int_{(\partial X)_e} \left(\sum_{i \in D_n} \Pi^{(n)}(a, i) h_\lambda(i, db) \right) \xi^{(b)} + \sum_{i \in D_n} \Pi^{(n)}(a, i) p_{ij}^{\min}(\lambda), \quad (a \in (\partial X)_e) \qquad (11.2.7)$$

的最小非负解.

及

$$\Pi^{(n)}(a,j)=P(x(\beta_1^{(n)})=j\,|\,x(\tau-0)=a),\quad (j\in D_n)\quad (11.2.8)$$

由 Q 矩阵和特征矩阵 $\Pi_{(\partial X)_e\times E}=(\Pi(a,n),\ a\in(\partial X)_e, n\in E)$ 唯一决定.

证. 由定理 10.2.3 知

$$p_{ij}^{(n)}(\lambda)=p_{ij}^{\min}(\lambda)+\int_{(\partial X)_e}h_\lambda(i,\ da)\xi_j^{(n,a)}(\lambda)\quad (11.2.9)$$

其中

$\xi_j^{(n,a)}(\lambda)$ $(a\in(\partial X)_e)$ 是积分方程 (11.2.7) 的最小非负解, 且

$$\xi_j^{(n,a)}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(x^{(n)}(t+\tau)=j\,|\,x(\tau-0)=a)dt$$
$$(a\in(\partial X)_e)\quad (11.2.10)$$

由定理 11.1.1 知

$$\lim_{n\to\infty}(\omega:\ x^{(n)}(t+\tau)=j)=(\omega:\ x(t+\tau)=j)\quad (11.2.11)$$

于是由 [22, §1.3] 中陈述的条件数学期望的性质 E 得

$$\lim_{n\to\infty}P(x^{(n)}(t)=j\,|\,x(\tau-0)=a)$$
$$=P(x(t+\tau)=j\,|\,x(\tau-0)=a)\quad (a\in(\partial X)_e),\quad (11.2.12)$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\xi_j^{(n,a)}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(x(t+\tau)$$
$$=j\,|\,x(\tau-0)=a)dt\quad (a\in(\partial X)_e)\quad (11.2.13)$$

对 (11.2.9) 的两端在 $n\to\infty$ 下取极限并注意 (11.2.13) 和

$$\int_{(\partial X)_e}h_\lambda(i,\ da)\leqslant 1\quad (11.2.14)$$

得

$$p_{ij}(\lambda)=\int_{(\partial X)_e}h_\lambda(i,\ da)\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(x(t+\tau)$$
$$=j\,|\,x(\tau-0)=a)dt\quad (a\in(\partial X)_e)\quad (11.2.15)$$

于是,由定理 11.1.2 立得我们的定理.

§ 11.3. 过份测度和过份函数的分解定理

本节将直接引用 [23, 第一章] 的一些定义和记号, 如 GTM,

流入律和流出律等.

定义 11.3.1. 一个行矢量 $\mathbf{H}=(h_i)$ 叫做一个过份测度,如果

$$0\leqslant\mathbf{H}<+\infty \tag{11.3.1}$$

$$\mathbf{H}\Pi(t)\leqslant\mathbf{H}\quad 对一切\ t\geqslant 0 \tag{11.3.2}$$

若更有

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{H}\Pi(t)=0 \tag{11.3.3}$$

则 $\mathbf{H}$ 叫做严格过份测度. 过份测度 $\mathbf{H}$ 叫做是调和测度,如果(11.3.2)中的等号成立. 在这里 $\Pi(t)$ 是一个 GTM.

定义 11.3.2. 一个列矢量 $\mathbf{D}=(d_i)$ 叫做一个过份函数,如果

$$0\leqslant\mathbf{D}<+\infty \tag{11.3.4}$$

$$\Pi(t)\mathbf{D}\leqslant\mathbf{D}\quad 对一切\ t\geqslant 0 \tag{11.3.5}$$

若更有

$$\lim_{t\to\infty}\Pi(t)\mathbf{D}=0 \tag{11.3.6}$$

则 $\mathbf{D}$ 叫做严格过份函数. 过份函数 $\mathbf{D}$ 叫做调和函数,如果(11.3.5)中等号成立.

定义 11.3.3. 一个流入律 $\mathbf{F}(\cdot)$ 叫做可积的,如果

$$\int_0^\infty\mathbf{F}(t)dt<+\infty \tag{11.3.7}$$

一个流出律 $\mathbf{W}(\cdot)$ 叫做可积的,如果

$$\int_0^\infty\mathbf{W}(t)dt<+\infty \tag{11.3.8}$$

注 11.3.1. 并非一切流入律和流出律都可积,如取 $\Pi(t)$ 为一个 Q 矩阵系保守的非正则的不断的生灭过程. 熟知,这时 $\Pi(t)$ 的每个状态都是常返的. 所以, $f_j(t)=p_{ij}(t)$ (i 固定)是不可积的流入律, $W_i(t)=p_{ij}(t)$ (j 固定)是不可积的流出律.

[23, 第一章] 的命题 3 说: 若 $\mathbf{H}$ 是一个严格过份测度,则存在流入律 $\mathbf{F}(\cdot)$ 使

$$\mathbf{H}=\int_0^\infty\mathbf{F}(t)dt \tag{11.3.9}$$

而且 $\mathbf{F}(\cdot)$ 是唯一的.

自然会使我们提出更深入的问题:

(A) 若 $\mathbf{F}(\cdot)$ 是一个流入律，则由 (11.3.9) 定义的 $\mathbf{H}$ 一定是一个严格过份测度吗? 若不一定是,尚须补充什么条件呢?

(B) 对于过份测度应有什么结果呢?

(C) 对于过份函数相应的结果是什么呢?

本节的目的是给出上述三个问题的解答.

引理 11.3.1. 若 $\mathbf{H} \geqslant 0$ 及

$$\varlimsup_{t\to\infty} \mathbf{H}\Pi(t) < +\infty \tag{11.3.10}$$

则

$$\mathbf{H} < +\infty \tag{11.3.11}$$

证. 若对某 $i \in I$, 有 $h_i = +\infty$, 则由 $p_{ii}(t) > 0 (0 \leqslant t < +\infty)$ 知

$$h_i p_{ii}(t) = +\infty \quad (0 \leqslant t < +\infty) \tag{11.3.12}$$

从而

$$h_i p_{ii}(t) \to +\infty \quad (t \to \infty) \tag{11.3.13}$$

但由 $\mathbf{H} \geqslant 0$ 和 (11.3.10) 知

$$\lim_{t\to\infty} h_i p_{ii}(t) \leqslant \varlimsup_{t\to\infty} \sum_j h_j p_{ji}(t) < +\infty \tag{11.3.14}$$

(11.3.13) 和 (11.3.14) 矛盾. 于是 (11.3.11) 必成立.

注 11.3.2. 引理 11.3.1 说明，严格过份测度可定义为满足条件 (11.3.2) 和 (11.3.3) 的非负行矢量.

引理 11.3.2. 若 $\mathbf{H}$ 是过份测度,则极限

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{H}\Pi(t) \tag{11.3.15}$$

存在,而且非负有限. 若令

$$\hat{\mathbf{H}} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{H}\Pi(t) \tag{11.3.16}$$

则 $\hat{\mathbf{H}}$ 是一调和测度.

证. 由 (11.3.1) 和 (11.3.2) 知

$$+\infty > \mathbf{H} \geqslant \mathbf{H}\Pi(t) \geqslant \mathbf{H}\Pi(t+s) \geqslant 0 \tag{11.3.17}$$

故极限 $\hat{\mathbf{H}} = \lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{H}\Pi(t)$ 存在,而且非负有限. 由

$$\sum_{j} h_j p_{ji}(s) p_{il}(t) \leqslant h_i p_{il}(t) \tag{11.3.18}$$

$$\sum_{i} h_i p_{il}(t) \leqslant h_l \tag{11.3.19}$$

知

$$\sum_{i} \hat{h}_i p_{il}(t) = \sum_{i} \left(\lim_{s \to \infty} \sum_{j} h_j p_{ji}(s) \right) p_{il}(t)$$

$$= \sum_{i} \lim_{s \to \infty} \sum_{j} h_j p_{ji}(s) p_{il}(t)$$

$$= \lim_{s \to \infty} \sum_{i} \sum_{j} h_j p_{ji}(s) p_{il}(t)$$

$$= \lim_{s \to \infty} \sum_{j} h_j \sum_{i} p_{ji}(s) p_{il}(t)$$

$$= \lim_{s \to \infty} \sum_{j} h_j p_{jl}(t+s)$$

$$= \lim_{t \to \infty} \sum_{j} h_j p_{jl}(t) = \hat{h}_l \tag{11.3.20}$$

所以 $\hat{\mathbf{H}}$ 是调和测度.

定理 11.3.1. $\mathbf{H}$ 为过份测度的充要条件是它能表示成如下形式:

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}} + \int_0^\infty \mathbf{F}(t) dt \tag{11.3.21}$$

其中 $\hat{\mathbf{H}}$ 为调和测度, $\mathbf{F}(\cdot)$ 为可积流入律. 而且

$$\hat{\mathbf{H}} = \lim_{t \to \infty} \mathbf{H}\Pi(t) \tag{11.3.22}$$

$$\mathbf{F}(t) = -\frac{d\mathbf{H}\Pi(t)}{dt} \tag{11.3.23}$$

从而过份测度的表示法 (11.3.21) 是唯一的.

证. 设 $\mathbf{H}$ 为一过份测度. 令

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{H} - \mathbf{H}\Pi(s) \tag{11.3.24}$$

根据 [23, 第一章命题 2] 知,存在一个流入律 $\mathbf{F}(\cdot)$ 使

$$\mathbf{H}\Pi(t) - \mathbf{H}\Pi(t+s) = \mathbf{G}(t+s) - \mathbf{G}(t) = \int_t^{s+t} \mathbf{F}(u) du \tag{11.3.25}$$

由［23, 第一章的命题 1 的 b)］知

$$\lim_{t\to 0} \mathbf{H}\Pi(t) = \mathbf{H} \tag{11.3.26}$$

由引理 (11.3.2) 知

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{H}\Pi(t+s) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{H}\Pi(t) = \hat{\mathbf{H}} \tag{11.3.27}$$

是一个调和测度. 于是由 (11.3.25) 得

$$+\infty > \mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}} = \int_0^\infty \mathbf{F}(u)du \tag{11.3.28}$$

从而知 $\mathbf{F}(\cdot)$ 是可积的, 且 (11.3.21) 成立;

反之, 设 $\hat{\mathbf{H}}$ 为一调和测度, $\mathbf{F}(\cdot)$ 为一可积的流入律, 令

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}} + \int_0^\infty \mathbf{F}(u)du \tag{11.3.29}$$

于是

$$\mathbf{H}\Pi(t) = \hat{\mathbf{H}}\Pi(t) + \int_t^\infty \mathbf{F}(u)du \tag{11.3.30}$$

由 $\hat{\mathbf{H}}$ 为调和测度, $\mathbf{F}(t)$ 非负可积, (11.3.29) 和 (11.3.30) 得

$$0 \leqslant \mathbf{H} < +\infty, \quad \mathbf{H}\Pi(t) \leqslant \hat{\mathbf{H}} + \int_0^\infty \mathbf{F}(u)du = \mathbf{H} \tag{11.3.31}$$

于是 $\mathbf{H}$ 为过份测度

设 (11.3.21) 成立, 于是有

$$\mathbf{H}\Pi(t) = \hat{\mathbf{H}}\Pi(t) + \int_t^\infty \mathbf{F}(u)du = \hat{\mathbf{H}} + \int_t^\infty \mathbf{F}(u)du \tag{11.3.32}$$

由 $\mathbf{F}(\cdot)$ 可积和 (11.3.32) 立得 (11.3.22) 和 (11.3.23).

至此, 定理证毕.

系 11.3.1. $\mathbf{H}$ 为严格过份测度的充要条件是它能表示成如下形式:

$$\mathbf{H} = \int_0^\infty \mathbf{F}(t)dt \tag{11.3.33}$$

其中 $\mathbf{F}(\cdot)$ 为可积的流入律. 而且

$$\mathbf{F}(t) = -\frac{d\mathbf{H}\Pi(t)}{dt} \tag{11.3.34}$$

从而严格过份测度的表示法 (11.3.33) 是唯一的.

根据 [23, 第一章] 中所指出的流出律和流入律关于 GTM 的对称性并注意定理 11.3.1 立得

定理 11.3.2. $\mathbf{D}$ 为过份函数的充要条件是它能表成如下的形式:

$$\mathbf{D}=\hat{\mathbf{D}}+\int_0^\infty \mathbf{W}(t)\,dt \tag{11.3.35}$$

其中 $\hat{\mathbf{D}}$ 为调和函数, $\mathbf{W}(\cdot)$ 为可积的流出律. 而且

$$\hat{\mathbf{D}}=\lim_{t\to\infty}\Pi(t)\mathbf{D} \tag{11.3.36}$$

$$\mathbf{W}(t)=-\frac{d\Pi(t)\mathbf{D}}{dt} \tag{11.3.37}$$

从而过份函数的表示法 (11.3.35) 是唯一的.

系 11.3.2. $\mathbf{D}$ 为严格过份函数的充要条件是它能表示成如下的形式:

$$\mathbf{D}=\int_0^\infty \mathbf{W}(t)\,dt \tag{11.3.38}$$

其中 $\mathbf{W}(\cdot)$ 为可积的流出律. 而且

$$\mathbf{W}(t)=-\frac{d\Pi(t)\mathbf{D}}{dt} \tag{11.3.39}$$

从而严格过份函数的表示法 (11.3.38) 是唯一的.

第五篇　齐次可列马尔可夫过程构造论

第十二章　Q 过程的唯一性准则

§12.1.　引　　言

设 $X=\{x(t,\omega),t<\sigma(\omega)\}$ 是定义在完备概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的齐次可列马尔可夫过程，其相空间 $E=(1,2,\cdots)$，其转移概率为 $p_{ij}(t),i,j\in E,t\geqslant 0$，它们是一组满足下列条件的实值函数

$$p_{ij}(t)\geqslant 0 \tag{12.1.1}$$

$$\sum_{j\in E}p_{ij}(t)\leqslant 1 \tag{12.1.2}$$

$$\sum_{k\in E}p_{ik}(t)p_{kj}(s)=p_{ij}(t+s) \tag{12.1.3}$$

$$\lim_{t\to 0}p_{ij}(t)=p_{ij}(0)=\delta_{ij} \tag{12.1.4}$$

其中 $\delta_{ii}=1$，$\delta_{ij}=0\ (i\neq j)$. 熟知，这时存在极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}=q_{ij} \tag{12.1.5}$$

而且 $0\leqslant q_{ij}<+\infty(i\neq j)$，$0\leqslant q_i\equiv -q_{ii}\leqslant +\infty$，$\sum_{j\in E}q_{ij}\leqslant 0$. 当 $q_i<+\infty(i\in E)$时，称过程是可微的，简称 $Q=(q_{ij})$为过程的密度矩阵，而过程 $X=\{x(t,\omega),t<\sigma(\omega)\}$ 则简称为 Q 过程，以表示它与 Q 有(12.1.5)式的关系. 如果两个 Q 过程有相同的 $p_{ij}(t)$，我们就把它们看作同一 Q 过程. 故在下面也称满足(12.1.1)—(12.1.5)式的$(p_{ij}(t))$，或其拉氏变换为一 Q 过程.

定义 12.1.1. 称定义在 $E\times E$ 上的矩阵 $Q=(q_{ij})$ 为 Q 矩阵，如果 Q 满足

$$0\leqslant q_{ij}<+\infty(i\neq j),\quad 0\leqslant q_i\equiv -q_{ii}<+\infty$$

$$\sum_{j\in E}q_{ij}\leqslant 0\quad (i\in E) \tag{12.1.6}$$

如果还有

$$\sum_{j\in E} q_{ij} = 0 \quad (i\in E) \tag{12.1.7}$$

则称 Q 为保守的 Q 矩阵.

显然,每个可微的过程的密度矩阵是 Q 矩阵. 反之,有下列三个基本问题需要回答: 对任给的一个 Q 矩阵, A) 是否存在一个 Q 过程呢? B) 如果 Q 过程存在,那么恰好存在一个的充要条件是什么呢? C) 如果知道 Q 过程不唯一了,那么全部 Q 过程如何构造出来?

1945 年, Doob[24] 回答了第一个问题,他证明了,对任给的一个 Q 矩阵, Q 过程总存在,而且只有两种可能,或者只存在一个 Q 过程,或者有无穷多个. 对于 Q 为保守的情况,第二个问题,即 Q 过程的唯一性问题,早在 1940 年已为 Feller[25] 所解决. 关于第三个问题,即求出全部 Q 过程的问题,最近十几年来,引起了广泛的注意,但距彻底解决还差得很远.

本章的目的是: 对任一已给的 Q 矩阵(未必保守),找出 Q 过程唯一的充要条件,即要证明

定理 12.1.1. 设任给一个 Q 矩阵,则存在唯一的 Q 过程的充要条件是下列二条件同时成立:

(i)

$$\inf_{i\in E} \lambda \sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) = \eta_\lambda > 0, \quad 0<\lambda<+\infty \tag{12.1.8}$$

其中 $P_\lambda^{\min} = (p_{ij}^{\min}(\lambda),\ i,\ j\in E)$ 是最小 Q 过程,即

$$p_{ij}^{\min}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f_{ij}(t)dt \quad (i, j\in E, 0<\lambda<+\infty) \tag{12.1.9}$$

而

$$f_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)}(t) \quad (i, j\in E) \tag{12.1.10}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{ij}^{(0)}(t) &= \delta_{ij} e^{-q_i t} \quad (i, j\in E) \\ f_{ij}^{(n+1)}(t) &= \sum_{k\neq i} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} f_{kj}^{(n)}(s) ds \\ &(n\geqslant 0,\ i,\ j\in E) \end{aligned}\right\} \tag{12.1.11}$$

(ii) 满足柯氏向前微分方程组的Q过程唯一，即最小Q过程不断$\left(\text{即} \lambda \sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) = 1 \ (i \in E)\right)$或方程

$$\begin{cases}\lambda \mathbf{n} - \mathbf{n}Q = \mathbf{0}_-, & \lambda > 0 \\ \mathbf{0}_1 \leqslant \mathbf{n}, \sum_i n(i) < +\infty \end{cases} \tag{12.1.12}$$

只有零解，其中 $\mathbf{n} = (n(1), n(2), \cdots)$，$\mathbf{0}_- = (0, 0, \cdots)$. 而最小$Q$过程不断的充要条件是$Q$保守且方程

$$\begin{cases}\lambda \mathbf{U} - Q\mathbf{U} = \mathbf{0}_1, & \lambda > 0 \\ \mathbf{0}_1 \leqslant \mathbf{U} \leqslant \mathbf{1} \end{cases} \tag{12.1.13}$$

只有零解，其中

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u(1) \\ u(2) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

下面我们首先给出定理 12.1.1 的证明，而后把它应用到几个特殊情况上及给出它的另一等价形式，最后证明定理 12.1.1 的条件 (i) 和 (ii) 是独立的及给出条件 (i) 的概率意义.

注 12.1.1. 上述定理就是 [26] 中的定理 1.1，但两者的条件 (ii) 的陈述稍不同。加条件 (ii) 的目的是使满足柯氏向前微分方程组的Q过程恰有一个. 这个条件为 G. E. H. Reuter 在[27]中所给出，在 [26] 中我们引用了这一结果. 但最近 Reuter 来信指出这一条件有小错误存在，并在 [34] 中改正了这一毛病. 其正确结果是：

(I) 满足柯氏向前微分方程组的Q过程唯一的充要条件是最小Q过程不断或方程 (12.1.12) 只有零解.

这一毛病的发现，也必须对 Reuter 的其他有关结果作如下的修正:

(II) 满足柯氏向前微分方程组的Q过程有无穷多个的充要条件是最小Q过程中断且方程 (12.1.12) 有非零解.

(III) 若最小Q过程不断或方程组 (12.1.12) 正好有一个线性独立解，则满足柯氏向前微分方程组的不断的Q过程唯一；若最小

Q过程中断且方程(12.1.12)有多于一个线性独立解,则满足柯氏向前微分方程组的不断的Q过程有无穷多个. 据(I),我们修正了[26]中定理1.1中第二个条件的毛病,而成为当前的定理12.1.1中的条件(ii). 在下面凡引用[27]中的这些结果时,都是指经G. E. H. Reuter修正过的上述结论,不再随处申明. 今在此对G. E. H. Reuter教授表示谢意. 关于定理12.1.1中的最后一句话"最小Q过程不断的充要条件是…"习知为真,故在下面定理的证明中将不顾及.

§12.2. 几 个 引 理

引理 12.2.1. 若定理12.1.1中的条件(i)成立,则方程

$$\begin{cases}\lambda \mathbf{U} - Q\mathbf{U} = \mathbf{0}_1, & \lambda > 0 \\ \mathbf{0}_1 \leqslant \mathbf{U} \leqslant \mathbf{1} \end{cases} \tag{12.2.1}$$

只有零解.

证. 由(12.1.9)—(12.1.11)式易证,$\{p_{ij}^{\min}(\lambda),\ i \in E\}$是第一型囿壹方程

$$u(i) = \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} u(k) + \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i} \quad (i \in E) \tag{12.2.2}$$

的最小非负解. 于是由定理3.3.2知,$\left\{\lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda),\ i \in E\right\}$是拟规格方程

$$u(i) = \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} u(k) + \frac{\lambda}{\lambda + q_i} \quad (i \in E) \tag{12.2.3}$$

的最小非负解. 所以,由$\lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \leqslant 1$,定理12.1.1中的条件(i)以及系3.2.4得知,方程

$$\left.\begin{array}{l} u(i) = \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} u(k), \quad \lambda > 0 \\ 0 \leqslant u(i) \leqslant 1 \quad (i \in E) \end{array}\right\} \tag{12.2.4}$$

只有零解. 然而方程(12.2.4)是方程(12.2.1)的等价方程,所以方程(12.2.1)只有零解.

注 12.2.1. 由 § 12.7 知，引理 12.2.1 的逆不真. 但在有限非保守的情况下，引理 12.2.1 的逆真，即方程 (12.2.1) 只有零解与定理 12.1.1 中的条件 (i) 等价，这是引理 12.2.1 和引理 12.8.2 的直接推论.

引理 12.2.2. 令

$$u_\lambda(i) = 1 - \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \quad (i \in E) \tag{12.2.5}$$

则当 λ 增大时 $u_\lambda(i)$ 不增，即当 λ 增大时 $\lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda)$ 不减.

证. 由于 $\left\{\lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda),\ i \in E\right\}$ 是方程 (12.2.3) 的最小非负解，及 $0 \leqslant \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \leqslant 1$，所以 $\{u_\lambda(i), i \in E\}$ 是非负线性方程

$$\left.\begin{aligned} u(i) &= \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} u(k) + \frac{-\sum_{j \in E} q_{ij}}{\lambda + q_i}, \quad i \in E \\ 0 &\leqslant u(i) \leqslant 1 \end{aligned}\right\} \tag{12.2.6}$$

的最大解，并且此最大解可由下列方式得到. 令

$$\left.\begin{aligned} u^{(0)}(i) &\equiv 1 \quad (i \in E) \\ u^{(n+1)}(i) &= \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} u^{(n)}(k) + \frac{-\sum_{j \in E} q_{ij}}{\lambda + q_i} \\ &(i \in E,\ n \geqslant 1) \end{aligned}\right\} \tag{12.2.7}$$

则

$$u^{(n)}(i) \downarrow u(i) \quad (n \uparrow +\infty) \tag{12.2.8}$$

由 (12.2.7) 和 (12.2.8) 式知，当 λ 增大时，$u_\lambda(i)$ 不增.

引理 12.2.3. 定理 12.1.1 中的条件 (i) 与下列条件等价:

存在某个常数 $0 < \lambda_0 < +\infty$，使

$$\inf_{i \in E} \lambda_0 \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda_0) = \eta_{\lambda_0} > 0 \tag{12.2.9}$$

证. 显然，只需证明由上述条件可推出定理12.1.1 的条件(i). 下面分两种情况证明.

（1）$0 < \lambda < \lambda_0$,

$$\eta_\lambda \geqslant \inf_{i \in E} \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda_0) = \frac{\lambda}{\lambda_0} \eta_{\lambda_0} > 0 \qquad (12.2.10)$$

（2）$\lambda_0 \leqslant \lambda < +\infty$.

由引理 12.2.2 知，$\eta_\lambda \geqslant \eta_{\lambda_0} > 0$，引理 12.2.3 获证.

注 12.2.2. 熟知，定理 12.1.1 中的条件（ii）等价于最小 Q 过程不断或方程（12.2.12）对某个常数 $0 < \lambda = \lambda_0 < +\infty$ 只有零解. 于是，由引理 12.2.3 知，定理 12.1.1 中的两个条件都可用形式上较弱、实质上等价的条件代替.

引理 12.2.4. 存在与 λ 无关的行向量 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha(1), \alpha(2), \cdots) > \mathbf{0}_-$，使 $\boldsymbol{\alpha} P_\lambda^{\min}$ 可和[1]，而 $\boldsymbol{\alpha}$ 不可和，即

$$\lambda \sum_{j \in E} \sum_{i \in E} \alpha(i) p_{ij}^{\min}(\lambda) = \sum_{i \in E} \alpha(i) \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) < +\infty$$

$$(0 < \lambda < +\infty) \qquad (12.2.11)$$

$$\sum_{i \in E} \alpha(i) = +\infty \qquad (12.2.12)$$

的充要条件是

$$\inf_{i \in E} \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) = \eta_\lambda = 0 \quad (0 < \lambda < +\infty) \quad (12.2.13)$$

或等价地，存在某一个常数 $0 < \lambda_0 < +\infty$，使

$$\inf_{i \in E} \lambda_0 \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda_0) = \eta_{\lambda_0} = 0 \qquad (12.2.14)$$

证. 先证充分性.

由于 $0 < \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \leqslant 1$，故使（12.2.11）式成立的行矢量 $\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}_-$ 是存在的，如选 $\alpha(i) = 2^{-i}$ $(i \in E)$. 若更有（12.2.12）式成立，则条件的充分性获证. 所以，下面我们假定所选的 $\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}_-$，使（12.2.11）式成立，而（12.2.12）式不成立. 任意选定一个数 $0 < \bar{\lambda}_0 < +\infty$，由于（12.2.13）式，可选 E 的无穷子集 $\hat{E}$ 使

$$\sum_{i \in \hat{E}} \bar{\lambda}_0 \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\bar{\lambda}_0) < +\infty \qquad (12.2.15)$$

1）一般地，一个行矢量 $\boldsymbol{\rho} = (\rho(1), \rho(2), \cdots)$ 可和是指 $\sum_j \rho(j) < \infty$.

令

$$\hat{E}_1 = (i: i \in \hat{E}, \alpha(i) > 1) \tag{12.2.16}$$

$$\hat{E}_2 = (i: i \in \hat{E}, \alpha(i) \leqslant 1) \tag{12.2.17}$$

$$\hat{\alpha}(i) = \begin{cases} \alpha(i), & i \in (E \backslash \hat{E}_2) \\ 1, & i \in \hat{E}_2 \end{cases} \tag{12.2.18}$$

则

$$\hat{\alpha}(i) \geqslant \alpha(i) > 0 \quad (i \in E) \tag{12.2.19}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i \in E} \hat{\alpha}(i)\bar{\lambda}_0 \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\bar{\lambda}_0) = & \sum_{i \in E \backslash \hat{E}} \hat{\alpha}(i)\bar{\lambda}_0 \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\bar{\lambda}_0) \\ & + \sum_{i \in \hat{E}} \bar{\lambda}_0 \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda_0) \leqslant \sum_{i \in E} \alpha(i)\bar{\lambda}_0 \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda_0) \\ & + \sum_{i \in \hat{E}} \bar{\lambda}_0 \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda_0) < +\infty \end{aligned} \tag{12.2.20}$$

而

$$\sum_{i \in E} \hat{\alpha}(i) \geqslant \sum_{i \in \hat{E}} \hat{\alpha}(i) \geqslant \sum_{i \in \hat{E}} 1 = +\infty \tag{12.2.21}$$

参考引理12.2.2的证明,易知,对任一$0 < \lambda < +\infty$,有

$$\sum_{i \in E} \hat{\alpha}(i)\lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) < +\infty \tag{12.2.22}$$

于是,引理 12.2.4 的充分性得证.

再证必要性.

若(12.2.14)式不成立,则由引理 12.2.3 知,这时有

$$\inf_{i \in E} \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) = \eta_\lambda > 0 \quad (0 < \lambda < +\infty) \tag{12.2.23}$$

若有$\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}_-$,使

$$\sum_{i \in E} \alpha(i)\lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) < +\infty \quad (0 < \lambda < +\infty) \tag{12.2.24}$$

则由(12.2.23)式得

$$\sum_{i \in E} \alpha(i)\lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \geqslant \eta_\lambda \sum_{i \in E} \alpha(i) \quad (0 < \lambda < +\infty) \tag{12.2.25}$$

由(12.2.24)和(12.2.25)式得

$$\eta_\lambda \sum_{i\in E}\alpha(i) < +\infty \tag{12.2.26}$$

由 $\eta_\lambda > 0$ 及 (12.2.26) 式得

$$\sum_{i\in E}\alpha(i) < +\infty \tag{12.2.27}$$

于是,引理 12.2.4 的必要性获证.

引理 12.2.5. 设 $\Phi(t)=(\phi_{ij}(t);\ i,\ j\in E,\ t\geqslant 0)$ 是满足柯氏向后微分方程组

$$\Phi'(t)=Q\Phi(t) \tag{12.2.28}$$

的一个 Q 过程. 若令

$$p_{ij}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\phi_{ij}(t)dt \quad (i,\ j\in E;\ 0<\lambda<+\infty) \tag{12.2.29}$$

$$\mathbf{P}_\lambda^{(j)}=\begin{pmatrix}p_{1j}(\lambda)\\ p_{2j}(\lambda)\\ \vdots\end{pmatrix}\quad (j\in E) \tag{12.2.30}$$

则列向量组 $\mathbf{P}_\lambda^{(j)}$ $(j\in E)$ 线性独立. 即若实数组 α_j $(j\in E)$ 使对某一 $\lambda>0$, $\sum_{j\in E}\alpha_j\mathbf{P}_\lambda^{(j)}$ 绝对收敛于 $\mathbf{0}_1$, 则

$$\alpha_j=0 \quad (j\in E) \tag{12.2.31}$$

特别,列向量组

$$\mathbf{P}_\lambda^{\min(j)}=\begin{pmatrix}p_{1j}^{\min}(\lambda)\\ p_{2j}^{\min}(\lambda)\\ \vdots\end{pmatrix}\quad (j\in E) \tag{12.2.32}$$

线性独立.

证. 由 $\Phi(t)$ 是满足方程组 (12.2.28) 的 Q 过程及(12.2.29)得

$$p_{ij}(\lambda)=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}p_{kj}(\lambda)+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}(i,\ j\in E) \tag{12.2.33}$$

从而

$$\begin{aligned}0&=\sum_{j\in E}\alpha_j p_{ij}(\lambda)=\sum_{j\in E}\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\alpha_j p_{kj}(\lambda)+\sum_{j\in E}\frac{\alpha_j\delta_{ij}}{\lambda+q_i}\\ &=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\sum_{j\in E}\alpha_j p_{kj}(\lambda)+\frac{\alpha_i}{\lambda+q_i}=0+\frac{\alpha_i}{\lambda+q_i}\quad (i\in E)\end{aligned} \tag{12.2.34}$$

从而(12.2.31)成立. 由最小Q过程$(f_{ij}(t);\ i,\ j\in E,\ t\geqslant 0)$满足(12.2.28)立即得到本引理的最后部分.

§12.3. 主要定理的证明

定理 12.1.1 的证明.

先证必要性部分.

若定理 12.1.1 的条件(ii)不成立,则由[27]知满足柯氏向前微分方程组的Q过程不止一个,于是Q过程非唯一.

若定理 12.1.1 的条件(i)不成立,于是由引理 12.2.4 知, 存在与λ无关的行矢量 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha(1),\ \alpha(2),\ \cdots)>\mathbf{0}_-$, 使$\boldsymbol{\alpha}P_\lambda^{\min}(0<\lambda<+\infty)$可和,但$\boldsymbol{\alpha}$不可和. 由$\boldsymbol{\alpha}$不可和,有

$$\frac{\left(-\sum\limits_{k\in E} q_{ik}\right)\alpha_j}{\sum\limits_{k\in E}\alpha_k}=0\quad (i,\ j\in E)\qquad (12.3.1)$$

于是,由文献[28]知

$$P_\lambda=P_\lambda^{\min}+\frac{(\mathbf{1}-\lambda P_\lambda^{\min}\mathbf{1})}{\lambda\boldsymbol{\alpha}P_\lambda^{\min}\mathbf{1}}\cdot\alpha P_\lambda^{\min}\qquad (12.3.2)$$

是一个Q过程,而且是不断的. 于是

$$\lambda P_\lambda\mathbf{1}=\mathbf{1}\qquad (12.3.3)$$

由条件(i)不成立,可知

$$\lambda P_\lambda^{\min}\mathbf{1}\neq\mathbf{1}\qquad (12.3.4)$$

所以

$$P_\lambda\neq P_\lambda^{\min}\qquad (12.3.5)$$

故Q过程非唯一. 至此,定理 12.1.1 必要性部分得证.

再证充分性部分.

设定理 12.1.1 中的条件(i)和(ii)成立, 证Q过程唯一. 不妨进一步假定最小Q过程中断,否则Q过程已唯一.

以 $P_\lambda=\{p_{ij}(\lambda);\ i,\ j\in E\}$ 表示任一Q过程. 熟知, 对每个$j\in E$, $\{p_{ij}(\lambda),\ i\in E\}$满足方程

$$x_i\geqslant\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}x_k+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}\quad (i\in E)\qquad (12.3.6)$$

而 $\{p_{ij}^{\min}(\lambda); i\in E\}$ 是方程

$$x_i = \sum_{k\neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda+q_i} x_k + \frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i} \quad (i\in E) \tag{12.3.7}$$

的最小(非负)解. 于是,容易论证

$$p_{ij}(\lambda) - p_{ij}^{\min}(\lambda) \geqslant 0 \quad (i, j\in E) \tag{12.3.8}$$

及 $\{p_{ij}(\lambda) - p_{ij}^{\min}(\lambda); i\in E\}$ 满足方程

$$x_i \geqslant \sum_{k\neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda+q_i} x_k \quad (i\in E) \tag{12.3.9}$$

令

$$r_{ij}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{q_{ij}}{\lambda+q_i}, & i\neq j \\ 0, & i=j \end{cases} \tag{12.3.10}$$

$$R_\lambda = (r_{ij}(\lambda); i, j\in E) \tag{12.3.11}$$

于是, $\{p_{ij}(\lambda) - p_{ij}^{\min}(\lambda); i\in E\}$ 是以 R_λ 为转移概率矩阵的马氏链的过份函数。显然,这个链是非常返的. 由引理 12.2.1, 文献 [13] 以及 $\sum\limits_{i\in E} 2^{-(i+1)}(p_{ij}(\lambda) - p_{ij}^{\min}(\lambda)) \leqslant \sum\limits_{i\in E} 2^{-(i+1)} < +\infty$ 知,

$$p_{ij}(\lambda) - p_{ij}^{\min}(\lambda) = \sum_{a\in E} k_\lambda(i, a)\hat{f}_\lambda^{(a)}(j) \geqslant 0$$

$$(i, j, a\in E) \tag{12.3.12}$$

其中

$$k_\lambda(i, a) = \frac{p_{ia}^{\min}(\lambda)}{\sum\limits_{k\in E} 2^{-(k+1)} p_{ka}^{\min}(\lambda)} \quad (a, j\in E) \tag{12.3.13}$$

令

$$f_\lambda^{(a)}(j) = \frac{\hat{f}_\lambda^{(a)}(j)}{\sum\limits_{k\in E} 2^{-(k+1)} p_{ka}^{\min}(\lambda)} \quad (a, j\in E) \tag{12.3.14}$$

把 (12.3.13) 和 (12.3.14) 式代入 (12.3.12) 式得

$$p_{ij}(\lambda) = p_{ij}^{\min}(\lambda) + \sum_{a\in E} p_{ia}^{\min}(\lambda) f_\lambda^{(a)}(j)$$

$$f_\lambda^{(a)}(j) \geqslant 0 \quad (\lambda > 0; i, j, a\in E) \tag{12.3.15}$$

由文献 [29] 知，$P_\lambda = \{p_{ij}(\lambda);\ i,\ j \in E\}$ 必须满足

$$P_\lambda \geqslant 0 \quad (\lambda > 0) \tag{12.3.16}$$

$$\lambda P\mathbf{1} \leqslant \mathbf{1} \quad (\lambda > 0) \tag{12.3.17}$$

$$P_\lambda - P_\mu + (\lambda + \mu)P_\lambda P_\mu = \mathbf{0} \quad (\lambda,\ \mu > 0) \tag{12.3.18}$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda(\lambda P_\lambda - \mathbf{I}) = Q \tag{12.3.19}$$

其中，$\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{I}$ 分别表示零矩阵和单位矩阵. 由(12.3.15)和(12.3.17)式得.

$$\mathbf{F}_\lambda^{(a)} = (f_\lambda^{(a)}(1),\ f_\lambda^{(a)}(2),\ \cdots) \geqslant \mathbf{0}_-$$
$$(\lambda > 0,\ a \in E) \tag{12.3.20}$$

及

$$\lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) + \lambda \sum_{a \in E} p_{ia}^{\min}(\lambda) \cdot [\mathbf{F}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{1}] \leqslant 1 \quad (i \in E) \tag{12.3.21}$$

由 (12.1.4) 式有

$$\lambda p_{aa}^{\min}(\lambda) > 0, \quad (\lambda > 0,\ a \in E) \tag{12.3.22}$$

由 (12.3.21) 和 (12.3.22) 式得

$$[\mathbf{F}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{1}] < +\infty \quad (\lambda > 0,\ a \in E) \tag{12.3.23}$$

这里及以后用

$$[\boldsymbol{\rho},\ \mathbf{C}] = \boldsymbol{\rho}\mathbf{C} = \sum_{i \in E} \rho(i)C(i) \tag{12.3.24}$$

表示行矢量 $\boldsymbol{\rho} = (\rho(1),\ \rho(2),\ \cdots)$ 和列矢量 $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C(1) \\ C(2) \\ \vdots \end{pmatrix}$ 的内积.

由 $P_\lambda^{\min}$ 满足 (12.3.18) 式得

$$\mathbf{P}_\lambda^{\min(a)} - \mathbf{P}_\mu^{\min(a)} + (\lambda - \mu)P_\lambda^{\min}\mathbf{P}_\mu^{\min(a)} = \mathbf{0}_1$$
$$(\lambda,\ \mu > 0,\ a \in E) \tag{12.3.25}$$

令

$$A(\mu,\ \lambda) = I + (\mu - \lambda)P_\lambda^{\min} \quad (\lambda,\ \mu > 0) \tag{12.3.26}$$

由 $P_\lambda^{\min}$ 满足(12.3.18) 式，得

$$A(\mu,\ \nu)A(\nu,\ \lambda) = A(\mu,\ \lambda) \tag{12.3.27}$$

$$A(\mu, \lambda)P_\mu^{\min} = P_\lambda^{\min} \tag{12.3.28}$$

(12.3.28) 式即

$$A(\mu, \lambda)\mathbf{P}_\mu^{\min(a)} = \mathbf{P}_\lambda^{\min(a)} \quad (a \in E) \tag{12.3.29}$$

把 (12.3.15) 式代入 (12.3.18) 式，并注意 $P_\lambda^{\min}$ 也满足 (12.3.18) 式及引理 12.2.5，得

$$\mathbf{F}_\lambda^{(a)}A(\lambda, \mu) = \mathbf{F}_\mu^{(a)} + (\mu - \lambda)\sum_{t \in E}[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}]\mathbf{F}_\mu^{(t)} \tag{12.3.30}$$

由 (12.3.20) 和 (12.3.26) 式知，当 $\lambda \geqslant \mu > 0$ 时，$\mathbf{F}_\lambda^{(a)}A(\lambda, \mu) \geqslant \mathbf{0}_-$；由 (12.3.30) 式知，当 $\mu \geqslant \lambda > 0$ 时，$\mathbf{F}_\lambda^{(a)}A(\lambda, \mu) \geqslant \mathbf{0}_-$. 所以，对于任意的 $\lambda, \mu > 0$，恒有 $\mathbf{F}_\lambda^{(a)}A(\lambda, \mu) \geqslant \mathbf{0}_-$. 由 (12.3.30) 式得

$$\begin{aligned}[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}A(\lambda, \mu), \mathbf{1}] = [\mathbf{F}_\mu^{(a)}, \mathbf{1}] + (\mu - \lambda) \\ \times \sum_{t \in E}[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}][\mathbf{F}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}]\end{aligned} \tag{12.3.31}$$

由 (12.3.15) 得

$$P_\mu\mathbf{1} = P_\mu^{\min}\mathbf{1} + \sum_{t \in E}\mathbf{P}_\mu^{\min(t)}[\mathbf{F}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}] \tag{12.3.32}$$

故

$$\begin{aligned}[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, P_\mu\mathbf{1}] = [\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min}\mathbf{1}] \\ + \sum_{t \in E}[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}][\mathbf{F}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}]\end{aligned} \tag{12.3.33}$$

但由 (12.3.17) 和 (12.3.23) 式知

$$[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, P_\mu\mathbf{1}] = \frac{1}{\mu}[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mu P_\mu\mathbf{1}] \leqslant \frac{1}{\mu}[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] < +\infty \quad (\mu > 0) \tag{12.3.34}$$

由 (12.3.23) 和 (12.3.34) 式知

$$\sum_{t \in E}[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}][\mathbf{F}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}] < +\infty \tag{12.3.35}$$

由 (12.3.23), (12.3.31) 及 (12.3.35) 式得

$$[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}A(\lambda, \mu), \mathbf{1}] < +\infty \tag{12.3.36}$$

即 $\mathbf{F}_\lambda^{(a)}A(\lambda, \mu)$ 可和. 今暂固定 a 及 $\lambda > 0$，而令

$$\boldsymbol{\rho}_\mu = \mathbf{F}_\lambda^{(a)}A(\lambda, \mu) \quad (\mu > 0) \tag{12.3.37}$$

于是 $\boldsymbol{\rho}_\mu \geqslant \mathbf{0}_-$ 且可和，并且由 (12.3.27) 式得

$$\boldsymbol{\rho}_\mu A(\mu, \nu) = \boldsymbol{\rho}_\nu \quad (\mu, \nu > 0) \tag{12.3.38}$$

根据文献 [29，引理 2.2] 及定理 12.1.1 的条件 (ii) 知，存在与 μ 无关(但与 a 和 λ 有关)的行矢量 $\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)} \geqslant \mathbf{0}_-$，使 $\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)} P_\mu^{\min}$ 可和，且

$$\mu \mathbf{F}_\lambda^{(a)} A(\lambda, \mu) - \mathbf{F}_\lambda^{(a)} A(\lambda, \mu) Q = \boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)} \quad (\mu > 0) \tag{12.3.39}$$

$$\mathbf{F}_\lambda^{(a)} A(\lambda, \mu) = \boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)} P_\mu^{\min} \quad (\mu > 0) \tag{12.3.40}$$

由 (12.3.39) 和 (12.3.40) 式，特别取 $\mu = \lambda$ 得

$$\lambda \mathbf{F}_\lambda^{(a)} - \mathbf{F}_\lambda^{(a)} Q = \boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)} \quad (\lambda > 0) \tag{12.3.41}$$

$$\mathbf{F}_\lambda^{(a)} = \boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)} P_\lambda^{\min} (\lambda > 0) \tag{12.3.42}$$

在 (12.3.30) 式的两端右乘以 $(\mu I - Q)$ 后，得

$$\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)} = \boldsymbol{\beta}_\mu^{(a)} + (\mu - \lambda) \sum_{t \in E} [\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] \boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)} \tag{12.3.43}$$

从而有

$$[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] = [\boldsymbol{\beta}_\mu^{(a)}, \mathbf{1}] + (\mu - \lambda) \sum_{t \in E} [\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] [\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}] \tag{12.3.44}$$

由 P_λ 和 $P_\lambda^{\min}$ 都满足 (12.3.19) 和 (12.3.15) 式，得

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda p_{ia}^{\min}(\lambda) \lambda f_\lambda^{(a)}(j) = 0 \quad (i, j, a \in E) \tag{12.3.45}$$

特别有

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda p_{aa}^{\min}(\lambda) \lambda f_\lambda^{(a)}(j) = 0 \tag{12.3.46}$$

但

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda p_{aa}^{\min}(\lambda) = 1 \tag{12.3.47}$$

故

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda f_\lambda^{(a)}(j) = 0 \tag{12.3.48}$$

更有

$$\lim_{\lambda \to \infty} f_\lambda^{(a)}(j) = 0 \tag{12.3.49}$$

由 (12.3.41) 式得

$$\lambda f_\lambda^{(a)}(j) + q_j f_\lambda^{(a)}(j) = \sum_{i \neq j} f_\lambda^{(a)}(i) q_{ij} + \beta_\lambda^{(a)}(j) \tag{12.3.50}$$

由（12.3.43）式知，当 μ 增加时，$\beta_\mu^{(a)}$ 不增．又由（12.3.48），（12.3.49）及（12.3.50）式，得

$$\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)} \downarrow \mathbf{0}_- \quad (\lambda \uparrow +\infty) \tag{12.3.51}$$

现分下列几步去完成定理的证明．

（1）试证

$$[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] \leqslant \frac{\lambda}{\eta_\lambda}[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] < +\infty \quad (\lambda > 0,\ a \in E) \tag{12.3.52}$$

证．由(12.3.23)式和定理12.1.1的条件(i)，只需证明(12.3.52)式的前半部分．由（12.3.42）式知，

$$\begin{aligned}\lambda[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] &= \lambda[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}P_\lambda^{\min}, \mathbf{1}] \\ &= [\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \lambda P_\lambda^{\min}\mathbf{1}] \geqslant \eta_\lambda[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}]\end{aligned} \tag{12.3.53}$$

于是

$$[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] \leqslant \frac{\lambda}{\eta_\lambda}[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] \tag{12.3.54}$$

（12.3.52）式得证．

（2）试证

$$\begin{aligned}&(\mu-\lambda)[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] \\ &\quad = [\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\lambda^{\min(t)}] - [\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] < +\infty \\ &\qquad (\lambda, \mu > 0,\ a, t \in E)\end{aligned} \tag{12.3.55}$$

证．注意到

$$[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] \leqslant \frac{1}{\mu}[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] < +\infty \quad (\lambda, \mu > 0) \tag{12.3.56}$$

$$\sup_{i \in E}|p_{it}^{\min}(\lambda) - p_{it}^{\min}(\mu)| \leqslant \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} < +\infty \quad (\lambda, \mu > 0) \tag{12.3.57}$$

及

$$\begin{aligned}(\mu-\lambda)[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] &= (\mu-\lambda)[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}P_\lambda^{\min}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] \\ &= (\mu-\lambda)[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, P_\lambda^{\min}\mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] = [\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, (\mu-\lambda)P_\lambda^{\min}\mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] \\ &= [\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\lambda^{\min(t)} - \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] = [\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\lambda^{\min(t)}] \\ &\quad - [\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}]\end{aligned} \tag{12.3.58}$$

即得所欲证．

（3）试证

$$\sum_{t \in E} [\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}]\mathbf{P}_\mu^{\min(t)} \leqslant \left(\frac{1}{\eta_\mu} - 1\right)\mathbf{1} \quad (\mu > 0) \tag{12.3.59}$$

证．由（12.3.15），（12.3.17）及（12.3.52）式得

$$\begin{aligned}\mathbf{1} &\geqslant \mu P_\mu \mathbf{1} = \mu P_\mu^{\min}\mathbf{1} + \sum_{t \in E} \mu[\mathbf{F}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}]\mathbf{P}_\mu^{\min(t)} \\ &\geqslant \eta_\mu \mathbf{1} + \sum_{t \in E} \eta_\mu [\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}]\mathbf{P}_\mu^{\min(t)} \\ &= \eta_\mu \left(\mathbf{1} + \sum_{t \in E} [\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}]\mathbf{P}_\mu^{\min(t)}\right)\end{aligned} \tag{12.3.60}$$

从而，（12.3.59）式成立．

（4）试证

$$\sum_{t \in E} [\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, [\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}]\mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] \leqslant \left(\frac{1}{\eta_\mu} - 1\right)[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] < +\infty$$

$$(\lambda, \mu > 0, a \in E) \tag{12.3.61}$$

证．由（12.3.52）及（12.3.60）式得

$$\begin{aligned}\sum_{t \in E} [\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, [\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}]\mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] &= \left[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \sum_{t \in E} [\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}]\mathbf{P}_\mu^{\min(t)}\right] \\ &\leqslant \left[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \left(\frac{1}{\eta_\mu} - 1\right)\mathbf{1}\right] = \left(\frac{1}{\eta_\mu} - 1\right)[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] < +\infty\end{aligned} \tag{12.3.62}$$

（5）试证

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] = [\boldsymbol{\beta}_\mu^{(a)}, \mathbf{1}] &+ \sum_{t \in E} [\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, [\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}]\mathbf{P}_\lambda^{\min(t)}] \\ &- \sum_{t \in E} [\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, [\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}]\mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] < +\infty \\ &(\lambda, \mu > 0, a \in E)\end{aligned} \tag{12.3.63}$$

证． 由（12.3.52）式，显然只需证（12.3.63）式的前半部分．由（12.3.44），（12.3.55）及（12.3.61）式知，

$$[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] = [\boldsymbol{\beta}_\mu^{(a)}, \mathbf{1}] + \sum_{t \in E} (\mu - \lambda)[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}][\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}]$$

$$= [\boldsymbol{\beta}_\mu^{(a)}, \mathbf{1}] + \sum_{t \in E} \{[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\lambda^{\min(t)}] - [\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}]\}[\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}]$$

$$= [\boldsymbol{\beta}_\mu^{(a)}, \mathbf{1}] + \sum_{t \in E} [\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, [\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}]\mathbf{P}_\lambda^{\min(t)}] - \sum_{t \in E} [\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, [\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}]\mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] \quad (12.3.64)$$

(12.3.63)式得证.

(6) 试证

$$[\boldsymbol{\beta}_\mu^{(a)}, \mathbf{1}] \downarrow 0 \quad (\mu \uparrow +\infty) \quad (12.3.65)$$

$$[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, [\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}]\mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] \downarrow 0 \quad (\mu \uparrow +\infty) \quad (12.3.66)$$

及

$$[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, [\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)}, \mathbf{1}]\mathbf{P}_\lambda^{\min(t)}] \downarrow 0 \quad (\mu \uparrow +\infty) \quad (12.3.67)$$

证. 由(12.3.51)式,即得(12.3.65)和(12.3.67)式:

由(12.3.51)式及

$$p_{tt}^{\min}(\mu) \downarrow 0 \quad (\mu \uparrow +\infty) \quad (12.3.68)$$

即得(12.3.66)式.

(7) 试证

$$[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] \equiv 0 \quad (\lambda > 0,\ a \in E) \quad (12.3.69)$$

证. 对(12.3.64)式的两端在 $\mu \uparrow +\infty$ 之下取极限, 由(12.3.65),(12.3.66)及(12.3.67)式,即得(12.3.69).

(8) 试证 Q 过程唯一.

由(12.3.69)式得

$$\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)} \equiv \mathbf{0}_- \quad (\lambda > 0, a \in E) \quad (12.3.70)$$

由(12.3.42)和(12.3.70)式得

$$\mathbf{F}_\lambda^{(a)} \equiv \mathbf{0}_- \quad (\lambda > 0,\ a \in E) \quad (12.3.71)$$

由(12.3.15)和(12.3.71)式得

$$P_\lambda \equiv P_\lambda^{\min} \quad (\lambda > 0) \quad (12.3.72)$$

即 Q 过程唯一.

至此,定理 12.1.1 的充分性得证,

§ 12.4. 对角线型的情况[1]

定义 12.4.1. 若 Q 矩阵有如下的性质，则称它是对角线型的，

$$q_{ij} = 0 \quad (i \neq j), q_{ii} \not\equiv 0 \quad (i \in E) \tag{12.4.1}$$

定理 12.4.1. 若 Q 矩阵是对角线型的，则 Q 过程唯一的充要条件是

$$\sup_{i \in E} q_i = C < +\infty \tag{12.4.2}$$

成立.

证.

(1) 充分性

若 (12.4.2) 成立，由于 $\left\{\lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda),\ i \in E\right\}$ 是方程

$$x_i = \frac{\lambda}{\lambda + q_i} \quad (i \in E) \tag{12.4.3}$$

的最小(非负)解，故

$$\lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda + q_i} \geqslant \frac{\lambda}{\lambda + c} > 0 \quad (i \in E) \tag{12.4.4}$$

于是，定理 12.1.1 中的条件 (i) 成立；这时方程 (12.1.12) 变成

$$\begin{cases} \lambda n_i = q_i n_i, & \lambda > 0 \\ 0 \leqslant n_i, & \sum_i n_i < +\infty \end{cases} \tag{12.4.5}$$

于是 $n_i \equiv 0$ $(i \in E)$，从而定理 12.1.1 的条件 (ii) 也满足. 故 Q 过程唯一.

(2) 必要性

若 (12.4.2) 式不成立，则

$$\inf_{i \in E} \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) = \inf_{i \in E} \frac{\lambda}{\lambda + q_i} = 0 \tag{12.4.6}$$

所以定理 12.1.1 的条件 (i) 不满足，故 Q 过程不唯一.

---

1) 本节结果早已为 G. E. H. Reuter[28] 用不同的方法得到.

§ 12.5. 有界的情况[1)]

引理 12.5.1. 若 $n(j)$ $(j\in E)$ 是方程(12.1.12)的任一非零解,则

$$\sum_{j\in E}\left(\sum_{k\neq j} q_{jk}\right)n(j)=+\infty \tag{12.5.1}$$

证. 由(12.1.12)知

$$(\lambda+q_j)n(j)=\sum_{k\neq j} q_{kj}n(k)\quad (j\in E) \tag{12.5.2}$$

于是有

$$\begin{aligned}\lambda\sum_{j\in E}n(j)+\sum_{j\in E}q_jn(j)&=\sum_{j\in E}\left(\sum_{k\neq j}q_{kj}\right)n(k)\\&=\sum_{k\in E}\left(\sum_{j\neq k}q_{kj}\right)n(k)=\sum_{j\in E}\left(\sum_{k\neq j}q_{jk}\right)n(j)\end{aligned} \tag{12.5.3}$$

若

$$\sum_{j\in E}\left(\sum_{k\neq j} q_{jk}\right)n(j)<+\infty \tag{12.5.4}$$

则由 $\lambda>0$,(12.5.4),以及

$$q_i\geqslant\sum_{k\neq j} q_{jk}\quad (j\in E)\quad \sum_{j\in E}n(j)<+\infty \tag{12.5.5}$$

得

$$\sum_{j\in E}n(j)=0 \tag{12.5.6}$$

由(12.5.6)和

$$n(j)\geqslant 0\quad (j\in E) \tag{12.5.7}$$

得

$$n(j)\equiv 0\quad (j\in E) \tag{12.5.8}$$

但这与 $n(j)$ $(j\in E)$ 是(12.1.12)的非零解矛盾. 故(12.5.4)不能成立. 于是(12.5.1)成立. 证毕.

---

1) 本节结果亦为 G. E. H. Reuter 独立得到.

定义 12.5.1. 若存在常数 $0 \leqslant c < +\infty$，使

$$-q_{ii} \leqslant c \quad (i \in E) \tag{12.5.9}$$

成立，则称 Q 矩阵是有界的.

引理 12.5.2. 若

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} \leqslant c < +\infty \quad (i \in E) \tag{12.5.10}$$

则方程（12.1.2）只有零解.

证. 由（12.5.10）知，对方程（12.1.12）的任一解 $n(j)$（$j \in E$）有

$$\sum_{j \in E} \left(\sum_{k \neq j} q_{jk} \right) n(j) \leqslant c \sum_{j \in E} n(j) < +\infty \tag{12.5.11}$$

于是由引理 12.1.1 立得所欲证.

定理 12.5.1. 若 Q 矩阵有界，则 Q 过程唯一.

证. 显然，本定理只需在 Q 为非保守时进行证明. 在引理 12.2.1 的证明中曾指出：

$$\left\{ \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda),\ i \in E \right\} \tag{12.5.12}$$

是方程（12.2.3）的最小非负解，故有

$$\lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \geqslant \frac{\lambda}{\lambda + q_i} \geqslant \frac{\lambda}{\lambda + c} > 0 \quad (i \in E) \tag{12.5.13}$$

从而定理 12.1.1 中的条件（i）满足. 由（12.5.9）知

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} \leqslant q_i \leqslant c < +\infty \quad (i \in E) \tag{12.5.14}$$

由（2.5.14）和引理 12.5.2 知，方程（12.1.12）只有零解，从而条件（ii）满足. 于是，由定理 12.1.1 立得我们的定理.

§ 12.6. E 为有限集的情况

定理 12.6.1. 若 E 为有限集，则 Q 过程唯一.

证. 显见，定理 12.1.1 对 E 为有限集的情况也适用，于是仿定理 12.5.1 的证明易完成本定理的证明.

§12.7. 分枝 Q 矩阵的情况

定义 12.7.1. 若 $E=(0,1,2,\cdots)$ 及 Q 矩阵满足

$$q_{ij}=\begin{cases} iq_{1,j-i+1}, & j\geqslant i-1 \\ 0, & j<i-1 \end{cases} \quad (i,j\in E) \qquad (12.7.1)$$

则称 Q 为分枝 Q 矩阵.

定义 12.7.2. 若 Q 过程 $P(t)=(p_{ij}(t),i,j\in E)$ 的 Q 矩阵是分枝 Q 矩阵,且

$$p_{ij}(t)=\sum_{\sum_{s=1}^{i} j_s=j}\prod_{s=1}^{i}p_{ij_s}(t) \quad (i,j\in E,t\geqslant 0) \qquad (12.7.2)$$

则称 $P(t)$ 为分枝 Q 过程.

引理 12.7.1. 对于任给的一个分枝 Q 矩阵, 有一个且仅有一个分枝 Q 过程,且它就是那个最小的 Q 过程.

证. 在 Q 为保守的情况下, [30, 第五章附录 1] 包含了我们的引理的证明. 其实那里的方法对 Q 为非保守的情况也适用. 故不赘述.

引理 12.7.2. 对于任给的一个分枝 Q 矩阵, 定理 12.1.1 中的条件 (ii) 满足,从而满足柯氏向前微分方程组的 Q 过程唯一.

证. 此即 [31, 定理 6.1]. 故不赘述.

引理 12.7.3. 设 Q 为一保守的分枝 Q 矩阵,则方程(12.2.1)只有零解, 即满足柯氏向后微分方程组的 Q 过程唯一的充要条件是对任 $\varepsilon>0$, 积分

$$\int_{1-\varepsilon}^{1}\frac{dx}{f(x)} \qquad (12.7.3)$$

发散,其中

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}q_{1j}x^{j} \quad (|x|\leqslant 1) \qquad (12.7.4)$$

证. 由 [30, 第五章的定理 4.2 和定理 9.1] 立得我们的引理.

引理 12.7.4. 若 Q 为一非保守的 Q 矩阵, 则方程 (12.2.1) 只

有零解,即满足柯氏向后微分方程组的 Q 过程唯一.

证. 分两种情况证明.

(1)

$$\sum_{j \neq 1} q_{1j} = 0 \tag{12.7.5}$$

这时方程

$$(\lambda \mathbf{1} - Q)\mathbf{U} = \mathbf{0}_1 \tag{12.7.6}$$

变成

$$\left.\begin{aligned} &\lambda u_0 = 0 \\ &(\lambda + q_1)u_1 = 0 \\ &(\lambda + 2q_1)u_2 = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(\lambda + kq_1)u_k = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{12.7.7}$$

于是 $u_k = 0$ $(k = 0, 1, \cdots)$. 所以方程(12.1.1)只有零解.

(2)

$$\sum_{j \neq 1} q_{1j} > 0 \tag{12.7.8}$$

令

$$\alpha = \frac{q_1}{\sum_{j \neq 1} q_{1j}} > 0 \tag{12.7.9}$$

由 Q 非保守知

$$\alpha > 1 \tag{12.7.10}$$

方程(12.7.6)即

$$\left.\begin{aligned} \lambda u_0 &= 0 \\ -q_{10}u_0 + (\lambda + q_1)u_1 - q_{12}u_2 - q_{13}u_3 - \cdots &= 0 \\ -2q_{10}u_1 + (\lambda + 2q_1)u_2 - q_{12}u_3 - \cdots &= 0 \\ -3q_{10}u_2 + (\lambda + 3q_1)u_3 - \cdots &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \end{aligned}\right\} \tag{12.7.11}$$

若上述方程组有解 $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}_1$, $\mathbf{U} \geqslant \mathbf{0}_1$, 则必有 $u_0 = 0$. 令 $u_1, u_2, \cdots$

中第一个大于零者为 $u_{k_1} > 0$，由(12.7.10)和(12.7.11)知，必存在 $n > k_1$ 使

$$u_n \geqslant \frac{\alpha(\lambda + k_1 q_1)}{k_1 q_1} u_{k_1} \tag{12.7.12}$$

令

$$k_2 = \min\left\{n \mid u_n \geqslant \frac{\alpha(\lambda + k_1 q_1)}{k_1 q_1} u_{k_1},\ n > k_1\right\} \tag{12.7.13}$$

注意(12.7.10)，(12.7.11)和 $u_{k_2-1} < u_{k_2}$ 知，存在 $n > k_2$ 使

$$u_n \geqslant \frac{\alpha(\lambda + k_2 q_1)}{k_2 q_1} u_{k_2} \tag{12.7.14}$$

令

$$k_3 = \min\left\{n \mid u_n \geqslant \frac{\alpha(\lambda + k_2 q_1)}{k_2 q_1} u_{k_2},\ n > k_2\right\} \tag{12.7.15}$$

如此继续作下去，我们得到一串严格上升的正整数列 $\{k_m\}$，且

$$\begin{aligned} u_{k_{m+1}} &\geqslant \alpha^m \left(\frac{\lambda + k_m q_1}{k_m q_1}\right)\left(\frac{\lambda + k_{m-1} q_1}{k_{m-1} q_1}\right)\cdots\left(\frac{\lambda + k_1 q_1}{k_1 q_1}\right) u_{k_1} \\ &\geqslant u_{k_1}\alpha^m \uparrow +\infty \quad (m \uparrow +\infty) \end{aligned} \tag{12.7.16}$$

故 $\{u_{k_m}\}$ 无界，从而 $\{u_n\}$ 无界．所以方程(12.2.1)只有零解．引理证毕．

引理 12.7.5. 若 Q 为一非保守的分枝 Q 矩阵，则定理 12.1.1 中的条件 (i) 不成立．

证．我们首先证明，若 $P(t) = (p_{ij}(t),\ i,\ j \in E)$ 是最小 Q 过程，则

$$\sum_{j \in E} p_{1j}(t) < 1 \quad (t > 0) \tag{12.7.17}$$

由引理 12.7.1 及[30，引理 6.2]知

$$\sum_{j \in E} p_{ij}(t) = \left(\sum_{j \in E} p_{1j}(t)\right)^i \quad (i \in E,\ t \geqslant 0) \tag{12.7.18}$$

由(12.7.18)式和 Q 非保守知，存在 $t_0 > 0$ 使

$$\sum_{j \in E} p_{1j}(t_0) < 1 \tag{12.7.19}$$

由(12.1.1)—(12.1.3)式和(12.7.19)式得

$$\sum_{j\in E} p_{1j}(t_0+s)=\sum_{j\in E}\sum_{k\in E} p_{1k}(t_0)p_{kj}(s)$$
$$=\sum_{k\in E} p_{1k}(t_0)\sum_{j\in E} p_{kj}(s)$$
$$\leqslant \sum_{k\in E} p_{1k}(t_0)<1 \quad (s\geqslant 0) \qquad (12.7.20)$$

令

$$\varepsilon=\inf\left(t:\sum_{j\in E} p_{1j}(t)<1\right) \qquad (12.7.21)$$

由(12.7.18),(12.7.20)和(12.7.21)得

$$\sum_{j\in E} p_{ij}(t)=1 \quad (t<\varepsilon) \qquad (12.7.22)$$

$$\sum_{j\in E} p_{ij}(t)<1 \quad (t>\varepsilon) \qquad (12.7.23)$$

于是

$$\sum_{j\in E} p_{1j}\left(\frac{3}{2}\varepsilon\right)=\sum_{j\in E}\sum_{k\in E} p_{1k}\left(\frac{3}{4}\varepsilon\right)p_{kj}\left(\frac{3}{4}\varepsilon\right)$$
$$=\sum_{k\in E} p_{1k}\left(\frac{3}{4}\varepsilon\right)\sum_{j\in E} p_{kj}\left(\frac{3}{4}\varepsilon\right)$$
$$=\sum_{k\in E} p_{1k}\left(\frac{3}{4}\varepsilon\right)=1 \qquad (12.7.24)$$

由(12.7.22)—(12.7.24)式得 $\varepsilon=0$,于是(12.7.17)式成立. 由(12.7.17)知

$$\left(\sum_{j\in E} p_{1j}\right)^i \downarrow 0 \quad (i\uparrow +\infty,\ t>0) \qquad (12.7.25)$$

由(12.7.18)和(12.7.25)得

$$\lim_{i\to\infty}\lambda\sum_{j\in E}\int_0^\infty e^{-\lambda t}p_{ij}(t)dt=\lim_{i\to\infty}\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\sum_{j\in E} p_{ij}(t)dt$$
$$=\lim_{i\to\infty}\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\sum_{j\in E} p_{1j}(t)\right)^i dt$$
$$=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\cdot 0dt=0 \qquad (12.7.26)$$

故得所欲证.

由定理 12.1.1 和以上诸引理得

定理 12.7.1. 设 Q 为一分枝 Q 矩阵，故 Q 保守，则 Q 过程唯一的充要条件是对任 $\varepsilon > 0$，积分

$$\int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{dx}{f(x)} \tag{12.7.27}$$

发散. 若 Q 非保守，则 Q 过程非唯一.

注 12.7.1. 在文献 [31] 的定理 6.3 中断言：分枝 Q 过程不断（那里叫做诚实）的充要条件是 Q 保守. 而 [31] 的第五章的定理 9.1 则断定：在 Q 为保守时分枝 Q 过程不断的充要条件是对任 $\varepsilon > 0$，积分

$$\int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{dx}{f(x)} \tag{12.7.28}$$

发散. 如当

$$f(x) = 1 - x \tag{12.7.29}$$

时，(12.7.28) 式中的积分发散；而当

$$f(x) = (1 - x) - \sqrt{1 - x}$$

时，(12.7.28) 式中的积分却收敛. 所以，在 Q 保守时分枝 Q 过程不总是不断的. 这样一来，[30] 与 [31] 各自的上述结论是矛盾的. 作者认为 [31] 的结论是正确的. [30] 发生错误的根源在于：利用了不总成立的如下式子：

$$\left.\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right|_{x=1} < +\infty \quad (k = 0, 1, \cdots) \tag{12.7.30}$$

§ 12.8. 另一判别准则和有限非保守情况

引理 12.8.1. 设 x_i^* $(i \in E)$ 是第一型围壹方程

$$x_i = \sum_{k \in E} a_{ik} x_k + b_i \quad (i \in E) \tag{12.8.1}$$

的最小非负解，令 $D = (i: b_i > 0)$，则

$$x_i^* \leqslant \sup_{j \in D} x_j^* \quad (i \in E) \tag{12.8.2}$$

即

$$\sup_{i\in E} x_i^* = \sup_{j\in D} x_j^* \tag{12.8.3}$$

证. 令

$$\left.\begin{aligned} x_i^{(1)} &= b_i \quad (i\in E) \\ x_i^{(n+1)} &= \sum_{k\in E} a_{ik}x_k^{(n)} + b_i \quad (i\in E, n\geqslant 1) \end{aligned}\right\} \tag{12.8.4}$$

于是有

$$x_i^{(1)} = \begin{cases} b_i > 0 & (i\in D) \\ 0 & (i\in E\backslash D) \end{cases} \tag{12.8.5}$$

所以

$$x_i^{(1)} \leqslant \sup_{j\in D} x_j^{(1)} \quad (i\in E) \tag{12.8.6}$$

假定有

$$x_i^{(n)} \leqslant \sup_{j\in D} x_j^{(n)} \quad (i\in E) \tag{12.8.7}$$

则当注意 n 增大时 $x_i^{(n)}$ $(i\in E)$ 不减,及(12.8.1)式是第一型闭壹方程时,即得

$$\begin{aligned} x_i^{(n+1)} &= \sum_{k\in E} a_{ik}x_k^{(n)} + b_i = \sum_{k\in E} a_{ik}x_k^{(n)} \leqslant \sum_{k\in E} a_{ik}\cdot \sup_{j\in D} x_j^{(n)} \\ &= \sup_{j\in D} x_j^{(n)}\cdot \sum_{k\in E} a_{ik} \leqslant \sup_{j\in D} x_j^{(n)} \leqslant \sup_{j\in D} x_j^{(n+1)} \\ &\quad (i\in E\backslash D) \end{aligned} \tag{12.8.8}$$

于是有

$$x_i^{(n+1)} \leqslant \sup_{j\in D} x_j^{(n+1)} \quad (i\in E) \tag{12.8.9}$$

故由归纳法知,对一切自然数 n 有

$$x_i^{(n)} \leqslant \sup_{j\in D} x_j^{(n)} \quad (i\in E) \tag{12.8.10}$$

由 $x_i^{(n)}\uparrow(n\uparrow+\infty)$, $\sup\limits_{j\in D} x_j^{(n)}\uparrow(n\uparrow+\infty)$ 以及(12.8.10)式即得(12.8.2)式. 引理获证.

引理 12.8.2. 若方程(12.2.1)只有零解,则

$$\inf_{i\in E} \lambda\sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) = \inf_{i\in j} \lambda\sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) \tag{12.8.11}$$

其中 $\dot{E}=\left(i\colon \sum_{j\in E} q_{ij}<0\right)$ 叫做非保守状态集.

证. 由方程(12.2.1)只有零解及引理 12.2.1 的证明知

$$u_\lambda(i)=1-\lambda\sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(\lambda)\quad (i\in E)\qquad (12.8.12)$$

是拟规格方程

$$x_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}x_k+\frac{-\sum_{j\in E} q_{ij}}{\lambda+q_i}\quad (i\in E)\quad (12.8.13)$$

的最小非负解. 于是由引理 12.8.1 知

$$\sup_{i\in E}\left(1-\lambda\sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(\lambda)\right)=\sup_{i\in\dot{E}}\left(1-\lambda\sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(\lambda)\right)\ (12.8.14)$$

从而(12.8.11)成立. 引理证毕.

由定理 12.1.1, 引理 12.2.1 以及引理 12.8.2 立得.

定理 12.8.1. 设已给一个 Q 矩阵, 则存在唯一的 Q 过程的充要条件是下列三条同时成立:

(i)′

$$\inf_{i\in\dot{E}}\lambda\sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(\lambda)>0,\quad 0<\lambda<+\infty\qquad (12.8.15)$$

(i)″ 方程(12.2.1)只有零解.

(ii) 最小 Q 过程不断或方程(12.1.12)只有零解.

注 12.8.1. 定理 12.8.1 给出的 Q 过程的唯一性准则比定理 12.1.1给出的准则更为完美. 因为条件(i)′, (i)″ 和(ii)各自的意义和作用都很明确. 条件(i)″ 和(ii)分别是加在满足柯氏向后和向前微分方程组的 Q 过程上的限制, 在 Q 为保守的情况下, 这两个条件就保证了 Q 过程是唯一的. 但在非保守情况下, 即若有非保守状态出现时, 这两个条件就未必能保证 Q 过程唯一了. 因此, 自然会使我们产生一个十分朴直的想法: 在一般情况下, 除条件(i)″ 和(ii)外, 在非保守状态上补充什么限制就能使 Q 过程唯一呢? 定理12.8.1给出了回答: 这种想法是成功的, 这个补充限制就是条件(i)′. 这样一来, 加在满足柯氏向后和向前微分方程组的 Q 过程上的限制(i)″ 和(ii), 就处在对称的地位了.

定义 12.8.1. 若 $\hat{E}$ 为有限集,则称 Q 为有限非保守的.

定理 12.8.2. 若 Q 矩阵是有限非保守的，则 Q 过程唯一的充要条件是满足柯氏向后和向前微分方程组的 Q 过程均唯一，即下列两条同时成立:

(A) 方程(12.2.1)只有零解;

(B) 最小 Q 过程不断或方程(12.1.2)只有零解.

证. 由

$$\lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) > 0 \quad (i \in E, \lambda > 0) \tag{12.8.16}$$

及 $\hat{E}$ 为有限集，立知定理 12.8.1 中的条件 (i)′ 成立. 于是得所欲证.

§12.9. 定理 12.1.1 中两个条件的独立性

今有生灭过程,其密度矩阵是

$$Q = \begin{pmatrix} -(\delta_0+\beta_0) & \beta_0 & 0 & 0 \cdots \\ \delta_1 & -(\delta_1+\beta_1) & \beta_1 & 0 \cdots \\ 0 & \delta_2 & -(\delta_2+\beta_2) & \beta_2 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{12.9.1}$$

其中 $\delta_0 > 0$. 令

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{\delta_0} \\ x_1 = x_0 + \dfrac{1}{\beta_0} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = x_0 + \dfrac{1}{\beta_0} + \cdots + \dfrac{\delta_1\delta_2\cdots\delta_{n-1}}{\beta_0\beta_1\cdots\beta_{n-1}} \quad (n = 2, 3, \cdots) \end{cases} \tag{12.9.2}$$

$$x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n \tag{12.9.3}$$

$$\mu_0 = 1, \mu_n = \frac{\beta_0\beta_1\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{12.9.4}$$

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} (x_\infty - x_i)\mu_i, \quad S = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\mu_i \tag{12.9.5}$$

(1) 定理 12.1.1 的条件 (i) 与 (ii) 同时成立的例子. 选

$$\delta_n = \beta_n = 1 \quad (n = 0, 1, 2\cdots) \tag{12.9.6}$$

则

$$R = S = +\infty \tag{12.9.7}$$

于是由 Q 为有限非保守,从引理 12.8.2, 文献 [4] 以及 [32, 定理1] 知,定理 12.1.1 的条件 (i) 和 (ii) 均成立.

(2) 定理 12.1.1 条件 (i) 成立,而条件 (ii) 不成立的例子. 选

$$\delta_n = \beta_n = (n+1)2^n \quad (n = 0, 1, \cdots) \tag{12.9.8}$$

则

$$x_n = n + 1 \quad (n = 0, 1, \cdots) \tag{12.9.9}$$

$$\mu_n = \frac{1}{(n+1)2^n} \quad (n = 0, 1, \cdots) \tag{12.9.10}$$

$$x_\infty = +\infty \tag{12.9.11}$$

$$R = +\infty, \ S = 1 < +\infty \tag{12.9.12}$$

于是由文献 [4] 及 [32, 定理 1, 4] 知,定理 12.1.1 条件 (i) 成立,而条件 (ii) 不成立.

(3) 定理 12.1.1 的条件 (i) 不成立, 而条件 (ii) 成立的例子. 选

$$\delta_n = \frac{1}{2}\beta_n = 2^n \quad (n = 0, 1, \cdots) \tag{12.9.13}$$

则

$$x_n = 2(1 - 2^{-(n+1)}) \quad (n = 0, 1, \cdots) \tag{12.9.14}$$

$$x_\infty = 2, \ x_\infty - x_i = 2^{-i} \quad (i = 0, 1, \cdots) \tag{12.9.15}$$

$$\mu_n = 1 \quad (n = 0, 1, \cdots) \tag{12.9.16}$$

$$R = 2 < +\infty, \quad S = +\infty \tag{12.9.17}$$

于是由 [4] 及 [32, 定理 1, 2] 知, 定理 12.1.1 的条件 (i) 不成立而条件 (ii) 成立.

(4) 定理 12.1.1 条件 (i) 和 (ii) 同时不成立的例子. 选

$$\delta_n = \frac{1}{2}\beta_n = 2^{2n} \quad (n = 0, 1, \cdots) \tag{12.9.18}$$

则

$$x_n = 2(1 - 2^{-(n+1)}) \quad (n = 0, 1, \cdots) \qquad (12.9.19)$$

$$x_\infty = 2, \ x_\infty - x_i = 2^{-i} \quad (i = 0, 1, \cdots) \qquad (12.9.20)$$

$$\mu_n = 2^{-n} \quad (n = 0, 1, \cdots) \qquad (12.9.21)$$

$$R = \frac{4}{3} < +\infty, \quad S = \frac{5}{3} < +\infty \qquad (12.9.22)$$

于是由 [4] 及 [32, 定理 2, 4] 知,条件 (i) 和 (ii) 均不成立.

由 (1)—(4) 知,定理 12.1.1 中的条件 (i) 和 (ii) 独立.

本节的结果也证明了生灭过程的四种类型(自然、流入、流出和正则)都是可实现的.

§ 12.10. 定理 12.1.1 中条件 (i) 的概率意义[1]

引理 12.10.1. 设 $J \subset E$, 下列两个条件等价:

(α_1)

$$\inf_{i \in J} \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) > 0, \quad 0 < \lambda < +\infty \qquad (12.10.1)$$

(β_1)

$$\inf_{i \in J} P_i(\tau > t_0) = \xi_t > 0, \quad \text{对某个固定的 } 0 < t_0 < +\infty \qquad (12.10.2)$$

其中 τ 表示最小 Q 过程的第一次无穷,其意义见 [1, II, § 19].

证. 若 (12.10.2) 成立,于是

$$P_i(\tau > t) \geqslant \xi_{t_0} \quad (i \in J, 0 \leqslant t \leqslant t_0) \qquad (12.10.3)$$

由 (12.10.3) 得

$$\begin{aligned} \inf_{i \in J} \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) &= \inf_{i \in J} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_i(\tau > t) dt \\ &\geqslant \inf_{i \in J} \lambda \int_0^{t_0} e^{-\lambda t} \xi_{t_0} dt \\ &= \lambda \xi_{t_0} \int_0^{t_0} e^{-\lambda t} dt > 0 \end{aligned} \qquad (12.10.4)$$

1) 本节所研究的问题是钟开莱教授提出的. 它也为 G. E. H. Reuter 独立得到.

于是(12.10.1)成立;反之,若(12.10.2)不成立,即

$$\inf_{i\in J} P_i(\tau > t) = 0 \quad (0 < t < +\infty) \tag{12.10.5}$$

于是对于任一固定的 $\delta > 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在 $s \in J$ 使

$$P_s(\tau > \delta) < \varepsilon \tag{12.10.6}$$

从而

$$P_s(\tau > t) < \varepsilon \quad (t \geqslant \delta) \tag{12.10.7}$$

于是

$$\begin{aligned}\inf_{i\in J} \lambda \sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) &= \inf_{i\in J} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_i(\tau > t)dt \\ &\leqslant \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_s(\tau > t)dt = \lambda \left[\int_0^\delta e^{-\lambda t} P_s(\tau > t)dt\right. \\ &\left.+ \int_\delta^\infty e^{-\lambda t} P_s(\tau > t)dt\right] \leqslant \lambda \left[\int_0^\delta dt + \int_\delta^\infty e^{-\lambda t}\varepsilon dt\right] \\ &\leqslant \lambda\left[\delta + \varepsilon \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt\right] = \lambda\delta + \varepsilon\end{aligned} \tag{12.10.8}$$

由 δ 和 ε 的任意性,立得

$$\inf_{i\in J} \lambda \sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) = 0 \tag{12.10.9}$$

从而(12.10.1)不成立. 所以(α_1)和(β_1)等价. 引理获证.

令

$$\begin{aligned}\hat{\Omega} = (\omega: \tau(\omega) = +\infty \text{ 或对任一 } \varepsilon > 0, \text{在}(\tau(\omega) - \varepsilon, \\ \tau(\omega)) \text{ 中有最小 } Q \text{ 过程的样本函数的无穷多个间断点})\end{aligned} \tag{12.10.10}$$

周知

引理 12.10.2. 下列两条件等价:

(α_2) 方程

$$\begin{cases}\lambda \mathbf{U} - Q\mathbf{U} = \mathbf{0}_1, & \lambda > 0 \\ \mathbf{0}_1 \leqslant \mathbf{U} \leqslant \mathbf{1}\end{cases} \tag{12.10.11}$$

只有零解.

(β_2) 在 $\hat{\Omega}$ 上 $\tau(\omega)$ 几乎等于 $+\infty$.

引理 12.10.3. 若方程

$$\begin{cases}\lambda \mathbf{U} - Q\mathbf{U} = \mathbf{0}_1, & \lambda > 0 \\ \mathbf{0}_1 \leqslant \mathbf{U} \leqslant \mathbf{1}\end{cases} \tag{12.10.12}$$

只有零解，则

$$P_i(\tau > t) \geqslant \inf_{j \in \dot{E}} P_j(\tau > t) \quad (t > 0, i \in E) \tag{12.10.13}$$

即

$$\inf_{i \in E} P_i(\tau > t) = \inf_{i \in \dot{E}} P_i(\tau > t) \tag{12.10.14}$$

证．令

$$F_i(t) = P_i(\tau \leqslant t) \quad (i \in E) \tag{12.10.15}$$

易证，在（12.10.12）只有零解之下，$F_i(t)$（$i \in E$）是积分方程

$$F_i(t) = \sum_{j \neq i} \int_0^t e^{-q_i s} q_{ij} F_j(t-s) ds + \frac{-\sum_{k \in E} q_{ik}}{q_i}(1 - e^{-q_i t}) \quad (i \in E) \tag{12.10.16}$$

的唯一解，$\left(这里约定 \frac{0}{0} = 0\right)$，并且它可用如下方式求得：

令

$$\begin{cases} F_i^{(1)}(t) = \dfrac{-\sum_{k \in E} q_{ik}}{q_i}(1 - e^{-q_i t}) \quad (i \in E) \\ F_i^{(n+1)}(t) = \sum_{j \neq i} \int_0^t e^{-q_i s} q_{ij} F_j^{(n)}(t-s) ds \\ \qquad + \dfrac{-\sum_{k \in E} q_{ik}}{q_i}(1 - e^{-q_i t}) \\ \qquad (i \in E, n \geqslant 1) \end{cases} \tag{12.10.17}$$

则

$$F_i^{(n)}(t) \uparrow F_i(t) \quad (n \uparrow +\infty) \tag{12.10.18}$$

往证

$$F_i(t) \leqslant \sup_{j \in \dot{E}} F_j(t) \quad (i \in E) \tag{12.10.19}$$

由（12.10.17）和 $\dot{E}$ 的定义知

$$F_i^{(1)}(t)=\begin{cases}\dfrac{-\sum\limits_{k\in E} q_{ik}}{q_i}(1-e^{-q_i t})>0, & (i\in E)\\ 0 & (i\in E\backslash\dot{E})\end{cases} \tag{12.10.20}$$

所以

$$F_i^{(1)}(t)\leqslant \sup_{j\in\dot{E}} F_j^{(1)}(t)\quad (i\in E) \tag{12.10.21}$$

假定有

$$F_i^{(n)}(t)\leqslant \sup_{j\in\dot{E}} F_j^{(n)}(t) \tag{12.10.22}$$

则当 n 增大时 $F_i^{(n)}(t)$ 不减，当 t 增大时 $F_i^{(n)}(t)$ 也不减，以及

$$\sum_{j\neq i}\int_0^t e^{-q_i s}q_{ij}ds=\frac{-\sum\limits_{j\neq i} q_{ij}}{q_i}(1-e^{-q_i t})\leqslant 1\quad (i\in E) \tag{12.10.23}$$

时，即得

$$\begin{aligned}
F_i^{(n+1)}(t)&=\sum_{j\neq i}\int_0^t e^{-q_i s}q_{ij}F_j^{(n)}(t-s)ds\\
&\quad+\frac{-\sum\limits_{k\in E} q_{ik}}{q_i}(1-e^{-q_i t})\\
&=\sum_{j\neq i}\int_0^t e^{-q_i s}q_{ij}F_j^{(n)}(t-s)ds\\
&\leqslant \sum_{j\neq i}\int_0^t e^{-q_i s}q_{ij}F_j^{(n)}(t)ds\\
&=\sum_{j\neq i}F_j^{(n)}(t)\int_0^t e^{-q_i s}q_{ij}ds\\
&\leqslant \sum_{j\neq i}\left(\sup_{k\in\dot{E}} F_k^{(n)}(t)\right)\int_0^t e^{-q_i s}q_{ij}ds\\
&=\sup_{k\in\dot{E}} F_k^{(n)}(t)\sum_{j\neq i}\int_0^t e^{-q_i s}q_{ij}ds\\
&\leqslant \sup_{j\in\dot{E}} F_j^{(n)}(t)\leqslant \sup_{j\in\dot{E}} F_j^{(n+1)}(t)\quad (i\in E\backslash\dot{E})
\end{aligned} \tag{12.10.24}$$

于是有

$$F_i^{(n+1)}(t) \leqslant \sup_{j \in \hat{E}} F_j^{(n+1)}(t) \quad (i \in E) \qquad (12.10.25)$$

故由归纳法知，对一切自然数 n 有

$$F_i^{(n)}(t) \leqslant \sup_{j \in \hat{E}} F_j^{(n)}(t) \quad (i \in E) \qquad (12.10.26)$$

由 $F_i^{(n)}(t) \uparrow (n \uparrow +\infty)$，$\sup_{j \in \hat{E}} F_j^{(n)} \uparrow (n \uparrow +\infty)$ 以及 (12.10.26) 立得 (12.10.19) 式.

由 (12.10.19) 及

$$P_i(\tau > t) = 1 - F_i(t) \quad (i \in E) \qquad (12.10.27)$$

立得(12.10.13). 于是引理得证.

定理 12.10.1. 下列诸条件等价

(i)

$$\inf_{i \in E} \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) = \eta_\lambda > 0 \quad 0 < \lambda < +\infty \qquad (12.10.28)$$

(ii)方程

$$\begin{cases} \lambda \mathbf{U} - \mathbf{U} Q = \mathbf{0}_1, & \lambda > 0 \\ \mathbf{0}_1 \leqslant \mathbf{U} \leqslant \mathbf{1} \end{cases} \qquad (12.10.29)$$

只有零解，且

$$\inf_{i \in \hat{E}} \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) = \hat{\eta}_\lambda > 0 \quad 0 < \lambda < +\infty \qquad (12.10.30)$$

(iii)

$$\inf_{i \in E} P_i(\tau > t) = \zeta_t > 0 \quad 0 < t < +\infty \qquad (12.10.31)$$

(iv) 在 $\hat{\Omega}$ 上$\tau(\omega)$几乎等于 $+\infty$，且

$$\inf_{i \in \hat{E}} P_i(\tau > t) = \hat{\zeta}_t > 0, \quad 0 < t < +\infty \qquad (12.10.32)$$

上述各条件中的 λ, t 分别换为任意固定的 $0 < \lambda_0 < +\infty$ 和 $0 < t_0 < +\infty$ 后也彼此等价.

证. 由 § 12.8 知 (i) 和 (ii) 等价.

由引理 12.10.1 知，(i) 与条件

$$\inf_{i \in E} P_i(\tau > t_0) = \zeta_{t_0} > 0$$

$$\text{对于某个固定的 } t_0 (0 < t_0 < +\infty) \qquad (12.10.33)$$

等价．因此，欲证明(i)和(iii)等价只需证明能由(12.10.33)推出(12.10.31)．

设(12.10.33)成立，令

$$t' = \sup\left(t:\ \inf_{i\in E} P_i(\tau > t) = \zeta_t > 0\right) \tag{12.10.34}$$

由(12.10.31)知

$$t' \geqslant t_0 > 0 \tag{12.10.35}$$

由 $P_i(\tau > t)$ 是 t 的非增函数知

$$\zeta_t > 0 \quad (0 \leqslant t < t') \tag{12.10.36}$$

若 $t' < +\infty$，则

$$\begin{aligned}\inf_{i\in E} P_i\left(\tau > \frac{3}{2}t'\right) &= \inf_{i\in E}\sum_{k\in E} p_{ik}^{\min}\left(\frac{3}{4}t'\right) P_k\left(\tau > \frac{3}{4}t'\right)\\ &\geqslant \inf_{i\in E}\sum_{k\in E} p_{ik}\left(\frac{3}{4}t'\right)\zeta_{\frac{3}{4}t'}\\ &= \zeta_{\frac{3}{4}t'}\inf_{i\in E} P_i\left(\tau > \frac{3}{4}t'\right) = (\zeta_{\frac{3}{4}t'})^2 > 0\end{aligned} \tag{12.10.37}$$

但这与(12.10.34)矛盾．故由(12.10.35)知，必有

$$t' = +\infty \tag{12.10.38}$$

于是由(12.10.36)知(12.10.31)成立．从而(i)和(iii)等价．

由引理 12.10.1 和引理 12.10.2 知，欲证(ii)和(iv)等价，只需证明由方程(12.10.29)只有零解和

$$\inf_{i\in \hat{E}} p_i(\tau > \hat{t}_0) = \hat{\zeta}_{\hat{t}_0} > 0$$

$$\text{对某个固定的 } 0 < \hat{t}_0 < +\infty \tag{12.10.39}$$

能推出(12.10.32)．

令

$$\hat{t} = \sup\left(t:\ \inf_{i\in \hat{E}} P_i(\tau > t) = \hat{\zeta}_t > 0\right) \tag{12.10.40}$$

于是

$$\hat{t} \geqslant \hat{t}_0 > 0 \tag{12.10.41}$$

$$\hat{\zeta}_t > 0 \quad (0 \leqslant t < \hat{t}_0) \tag{12.10.42}$$

若 $\hat{t} < +\infty$，则由引理 12.10.3 知

$$\inf_{i\in\dot{E}} P_i\left(\tau > \frac{3}{2}\hat{t}\right) = \inf_{i\in\dot{E}} \sum_{k\in E} p_{ik}^{\min}\left(\frac{3}{4}\hat{t}\right) P_k\left(\tau > \frac{3}{4}\hat{t}\right)$$

$$\geqslant \inf_{i\in\dot{E}} \sum_{k\in E} p_{ik}^{\min}\left(\frac{3}{4}\hat{t}\right)\dot{\zeta}_{\frac{3}{4}\hat{t}}$$

$$= \dot{\zeta}_{\frac{3}{4}\hat{t}} \inf_{i\in\dot{E}} P_i\left(\tau > \frac{3}{4}\hat{t}\right) = (\dot{\zeta}_{\frac{3}{4}\hat{t}})^2 > 0 \qquad (12.10.43)$$

但这与(12.10.40)矛盾，故必有

$$\hat{t} = +\infty$$

于是(12.10.32)成立. 从而(ii)与(iv)等价.

关于定理的陈述中的最后一句话易证为真. 于是定理的证明遂告完成.

第十三章　Q 过程的构造

§13.1.　构 造 定 理

首先约定，在 §13.1—§13.3 中出现的 Q 过程都具有在 §1.1 中引入的性质 (D)，而其 Q 矩阵满足 (9.1.1).

定义 13.1.1. 若矩阵 $\hat{\Pi}_{(\partial X)_e\times E}=(\hat{\Pi}(a,j),\ a\in(\partial X)_e,\ j\in E)$ 的元素 $\hat{\Pi}(a,j)$ 对任一固定的 $j\in E$ 是 $(\partial X)_e$ 上的 Borel 可测函数，且满足

$$0\leqslant\hat{\Pi}(a,j)\leqslant 1\quad(a\in(\partial X)_e,\ j\in E)\qquad(13.1.1)$$

则称为囿壹矩阵.

设 $\hat{\Pi}_{(\partial X)_e\times E}=(\hat{\Pi}(a,j),\ a\in(\partial X)_e,\ j\in E)$ 为一囿壹矩阵，令

$$\hat{\Pi}^{(1)}(a,1)=\hat{\Pi}(a,1)\quad(a\in(\partial X)_e)\qquad(13.1.2)$$

这时得矩阵 $\hat{\Pi}_{(\partial X)_e\times D_1}=(\hat{\Pi}^{(1)}(a,j),\ a\in(\partial X)_e,\ j\in D_1)$. 设矩阵 $\Pi_{(\partial X)_e\times D_n}=(\hat{\Pi}^{(n)}(a,j),\ a\in(\partial X)_e,\ j\in D_n)$ 已作出，则令

$$\hat{\Pi}^{(n+1)}(a,n+1)=\hat{\Pi}(a,n+1)\quad(a\in(\partial X)_e)\qquad(13.1.3)$$

$$\hat{\Pi}^{(n+1)}(a,j)=\hat{\Pi}^{(n)}(a,j)-\hat{\Pi}(a,n+1)$$
$$\times\left({}_{D_n}\bar{f}^{*}_{n+1,j}+\int_{(\partial X)_e}(h(n+1,db)-\bar{f}^{*(db)}_{n+1,D_n})\hat{\Pi}^{(n)}(b,j)\right)$$
$$(a\in(\partial X)_e,\ j\in D_n)\qquad(13.1.4)$$

这时得到矩阵 $\hat{\Pi}_{(\partial X)_e\times D_{n+1}}=(\hat{\Pi}^{(n+1)}(a,j),\ a\in(\partial X)_e,\ j\in D_{n+1})$. 继续这样作下去，得一矩阵叙列:

$$\hat{\Pi}_{(\partial X)_e\times D_n}=(\hat{\Pi}^{(n)}(a,j),\ a\in(\partial X)_e,\ j\in D_n)$$
$$(n=1,2,\cdots)\qquad(13.1.5)$$

易证

引理13.1.1. 对任一 $n\geqslant 1$，上面定义的 $\hat{\Pi}^{(n)}(a,j)$ 有意义，且

$$|\hat{\Pi}^{(n)}(a,j)|\leqslant n!\quad(a\in(\partial X)_e,\ j\in D_n)\qquad(13.1.6)$$

引理 13.1.1 保证了上面由囿壹矩阵 $\hat{\Pi}_{(\partial X)_c\times E}$ 构造矩阵叙列 $\hat{\Pi}_{(\partial X)_c\times D_n}(n=1, 2, \cdots)$ 的手续的能行性.

定义 13.1.2. 矩阵叙列 $\hat{\Pi}_{(\partial X)_c\times D_n}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 叫做囿壹矩阵 $\hat{\Pi}_{(\partial X)_c\times E}$ 的 Q-导出矩阵叙列.

定义 13.1.3. 囿壹矩阵 $\hat{\Pi}_{(\partial X)_c\times E}=(\hat{\Pi}(a,j); a\in(\partial X)_c, j\in E)$ 叫做 Q-母矩阵,如果其 Q-导出矩阵叙列 $\hat{\Pi}_{(\partial X)_c\times D_n}=(\hat{\Pi}^{(n)}(a, j);$ $a\in(\partial X)_c, j\in D_n)$ 满足下列条件:

$$\hat{\Pi}^{(n)}(a, j)\geqslant 0 \quad (a\in(\partial X)_c, j\in D_n) \tag{13.1.7}$$

$$\sum_{j\in D_n}\hat{\Pi}^{(n)}(a, j)\leqslant 1 \quad (a\in(\partial X)_c) \tag{13.1.8}$$

定理 13.1.1. 设 $X(\omega)=\{x(t, \omega), t<\sigma(\omega)\}$ 是一 Q 过程,对任一 $n\geqslant 1$, 若令

$$X^{(n)}(\omega)=g_n(X(\omega)) \tag{13.1.9}$$

$$\Pi^{(n)}(a, j)=P(x(\beta_1^{(n)})=j\,|\,x(\tau-0)=a) \quad (a\in(\partial X)_c, j\in D_n) \tag{13.1.10}$$

$$\Pi(a, n)=\Pi^{(n)}(a, n)=P(x(\beta_1^{(n)})=n\,|\,x(\tau-0)=a) \quad (a\in(\partial X)_c) \tag{13.1.11}$$

其中 $\beta_1^{(n)}$ 的定义见 § 1.2, 则

(i) $\Pi_{(\partial X)_c\times E}=(\Pi(a, n), a\in(\partial X)_c, n\in E)$ 是一个 Q-母矩阵, $\Pi_{(\partial X)_c\times D_n}=(\Pi^{(n)}(a, j), a\in(\partial X)_c, j\in D_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 是 $\Pi_{(\partial X)_c\times E}$ 的 Q-导出矩阵叙列.

(ii) $X^{(n)}(\omega)=\{x^{(n)}(t,\omega), t<\sigma^{(n)}(\omega)\}$ 是一个 $(Q, \Pi_{(\partial X)_c\times D_n})$ 过程,且

$$X^{(n)}(\omega)=g_n(X^{(n+1)}(\omega)) \tag{13.1.12}$$

(iii) 在 $[0, \sigma(\omega))$ 上处处有

$$\lim_{n\to\infty}x^{(n)}(t, \omega)=x(t, \omega) \quad (\omega\in\Omega) \tag{13.1.13}$$

(iv)

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}(t)=p_{ij}(t) \tag{13.1.14}$$

其中

$$p_{ij}^{(n)}(t)=P(x^{(n)}(t)=j\,|\,x^{(n)}(0)=i) \tag{13.1.15}$$

$$p_{ij}(t) = P(x(t) = j | x(0) = i) \tag{13.1.16}$$

反之，设 $\Pi_{(\partial X)_c \times E} = (\Pi(a, n);\ a \in (\partial X)_c,\ n \in E)$ 是一个 Q-母矩阵，$\Pi_{(\partial X)_c \times D_n} = (\Pi^{(n)}(a, j);\ a \in (\partial X)_c,\ j \in D_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$是其 Q-导出矩阵叙列，则存在一个完备的概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$，在其上可以定义一列 Q 过程 $X^{(n)}(\omega) = \{x^{(n)}(t, \omega),\ t < \sigma^{(n)}(\omega)\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 使得

(A) $X^{(n)}(\omega)$ 是 $(Q, \Pi_{(\partial X)_c \times D_n})$ 过程，且

$$X^{(n)}(\omega) = g_n(X^{(n+1)}(\omega)) \tag{13.1.17}$$

(B) 在 $[0, \sigma(\omega))$ 上

$$\lim_{n \to \infty} x^{(n)}(t, \omega) = x(t, \omega) \quad (\omega \in \Omega) \tag{13.1.18}$$

处处存在，且 $X(\omega) = \{x(t, \omega),\ t < \sigma(\omega)\}$ 是一个 Q 过程，其中

$$\sigma(\omega) = \lim_{n \to \infty} \sigma^{(n)}(\omega) \quad (\omega \in \Omega) \tag{13.1.19}$$

(C)

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}(t) = p_{ij}(t) \tag{13.1.20}$$

其中

$$p_{ij}^{(n)}(t) = P(x^{(n)}(t) = j | x^{(n)}(0) = i) \tag{13.1.21}$$

$$p_{ij}(t) = P(x(t) = j | x(0) = i) \tag{13.1.22}$$

证. 由定理 11.1.1，定理 11.1.2 以及引理 10.1.1 并参考 [2，引理 7.7] 的证明易完成本定理的证明.

§13.2. 全部 Q 过程的刻划

设 $\Pi_{(\partial X)_c \times E} = (\Pi(a, n),\ a \in (\partial X)_c,\ n \in E)$ 是一个 Q-母矩阵，$\Pi_{(\partial X)_c \times D_n} = (\Pi^{(n)}(a, j),\ a \in (\partial X)_c,\ j \in D_n)(n = 1, 2, \cdots)$ 是 $\Pi_{(\partial X)_c \times E}$ 的 Q-导出矩阵叙列. 由定理 13.1.1 知，对任一 $n \geqslant 1$，存在一个 $(Q, \Pi_{(\partial X)_c \times D_n})$ 过程 $(p_{ij}^{(n)}(t),\ i, j \in E)_{t \geqslant 0}$. 由定理 13.1.1 知极限

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}(t) = p_{ij}(t) \tag{13.2.1}$$

存在，且 $(p_{ij}(t),\ i, j \in E)_{t \geqslant 0}$ 是一个 Q 过程. 由于 $(p_{ij}(t),\ i, j \in$

$E)_{t\geq 0}$ 由 Q 和 $\Pi_{(\partial X)_e\times E}$ 唯一决定，故我们把 $(p_{ij}(t);\ i,\ j\in E)_{t\geq 0}$ 又叫做 $\{Q,\Pi_{(\partial X)_e\times E}\}$ 过程. 于是由定理 13.1.1 得

定理 13.2.1. 全部 $\{Q,\ \Pi_{(\partial X)_e\times E}\}$ 过程恰是全部 Q 过程.

§ 13.3. $\{Q,\ \Pi_{(\partial X)_e\times E}\}$ 过程的表达式

定理 13.3.1. 设 $\Pi_{(\partial X)_e\times E}=(\Pi(a,\ n),\ a\in(\partial X)_e,\ n\in E)$ 是一个 Q-母矩阵，$(p_{ij}(t),\ i,\ j\in E)_{t\geq 0}$ 是 $\{Q,\ \Pi_{(\partial X)_e\times E}\}$ 过程. 若令

$$p_{ij}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}p_{ij}(t)dt \tag{13.3.1}$$

则

$$p_{ij}(\lambda)=\int_{(\partial X)_e}h_\lambda(i,\ da)\xi_j^{(a)}(\lambda) \tag{13.3.2}$$

其中

$$\xi_j^{(a)}(\lambda)=\lim_{n\to\infty}\xi_j^{(n,a)}(\lambda)\quad(a\in(\partial X)_e) \tag{13.3.3}$$

而 $\xi_j^{(n,a)}$ $(a\in(\partial X)_e)$ 是积分方程

$$\xi^{(a)}=\int_{(\partial X)_e}\left(\sum_{i\in E}\Pi^{(n)}(a,\ i)h_\lambda(i,\ db)\right)\xi^{(b)}$$

$$+\sum_{i\in E}\Pi^{(n)}(a,\ i)p_{ij}^{\min}(\lambda)\quad(a\in(\partial X)_e) \tag{13.3.4}$$

的最小非负解，$\Pi_{(\partial X)_e\times D_n}=(\Pi^{(n)}(a,j),a\in(\partial X)_e,\ j\in D_n)(n=1,2,\cdots)$ 是 $\Pi_{(\partial X)\times E}$ 的 Q-导出矩阵叙列.

证. 与定理 11.2.1 的证明类似.

§ 13.4. 讨　　论

在 § 9.1 中我们曾指出，我们假定 $q_i>0,\ \sum_{j\in E}q_{ij}=0\ (i\in E)$ 只是为了论证的方便. 假若由 § 9.1 开始我们就不这样，则所得结果在形式上与原来的一样，只是在本章所得到的不是全部 Q 过程，而是全部满足柯氏向后微分方程组的 Q 过程. 我们现在仅对本章的内容解除上述限制，来得到全部满足柯氏向后微分方程组的 Q 过程.

定义 13.4.1. Q 矩阵叫做是双保守的，如果 $q_i>0,\ \sum_{j\in E}q_{ij}=0$

$(i\in E)$.

任给一个保守的 Q 矩阵，令

$$E^0=(i;\ i\in E,\ q_i=0) \tag{13.4.1}$$

$$E^+=(i;\ i\in E,\ q_i\neq 0) \tag{13.4.2}$$

$$E_0=(-i;\ i\in E^0) \tag{13.4.3}$$

$$\hat{E}=E^0\cup E^+\cup E_0 \tag{13.4.4}$$

用下列方式，由 Q 构造矩阵 $\hat{Q}=(\hat{q}_{ij};\ i,\ j\in\hat{E})$:

$$\hat{q}_{ij}=\begin{cases} q_{ij}, & (i,\ j\in E^+) \\ \dfrac{1}{2}q_{i|j|}, & (i\in E^+,\ j\in E^0\cup E_0) \\ -1, & (i\in E^0\cup E_0,\ j=i) \\ 1, & (i\in E^0\cup E_0,\ j=-i) \\ 0, & (i\in E^0\cup E_0,\ j\neq\pm i) \end{cases} \tag{13.4.5}$$

显见有

引理 13.4.1. 矩阵 $\hat{Q}$ 是双保守的 Q 矩阵.

由 Q 到矩阵 $\hat{Q}$ 的这个变换记作 L，即

$$LQ=\hat{Q} \tag{13.4.6}$$

设 $\hat{P}(t)=(\hat{p}_{ij}(t),\ i,\ j\in\hat{E})$ 是一个 $\hat{Q}$ 过程. 由 $\hat{P}(t)$ 用下列方式构造矩阵 $P(t)=(p_{ij}(t),\ i,\ j\in E)$:

$$p_{ij}(t)=\begin{cases} \hat{p}_{ij}(t), & (i\in E,\ j\in E^+) \\ \hat{p}_{ij}(t)+\hat{p}_{i-j}(t), & (i\in E,\ j\in E^0) \end{cases} \tag{13.4.7}$$

由 $\hat{P}(t)$ 到 $P(t)$ 的这个变换记为 G，即

$$G\hat{P}(t)=P(t) \tag{13.4.8}$$

易证

定理 13.4.1. 若 $\hat{P}(t)$ 是一个 $\hat{Q}$ 过程，则

$$P(t)=G\hat{P}(t) \tag{13.4.9}$$

是一个 Q 过程；反之，若 $P(t)$ 是一个 Q 过程，则存在一个 $\hat{Q}$ 过程 $\hat{P}(t)$ 使 (13.4.9) 成立.

由定理 13.4.1 和下面的命题 14.3.1 知，在本书里我们得到了如下的结果：对于任意的一个 Q 矩阵，可以构造出全部满足柯氏向后微分方程组的 Q 过程.

第十四章　定 性 理 论

§14.1. 引　　言

对任给一个Q矩阵，在§12.1中指出，有下列三个基本问题需要解决：(A)是否存在一个Q过程呢？(B)如果Q过程存在，那么恰好存在一个Q过程的充要条件是什么呢？(C)如果知道Q过程不唯一了，那么全部Q过程如何构造出来？从定性和定量观点来看，上述三个问题中(A)和(B)是属于定性问题，(C)是属于定量问题．事实上，关于定性问题远不止这两个．为了说明这点，今先引入

定义 14.1.1. 对任给的一个Q矩阵，把满足柯氏向后微分方程组

$$P'(t) = QP(t) \tag{14.1.1}$$

的Q过程叫做B型Q过程；把满足柯氏向前微分方程组

$$P'(t) = P(t)Q \tag{14.1.2}$$

的Q过程叫做F型Q过程；把同时满足(14.1.1)和(14.1.2)，既不满足(14.1.2)也不满足(14.1.1)，不满足(14.1.1)，不满足(14.1.2)，不满足(14.1.1)但满足(14.1.2)，满足(14.1.1)但不满足(14.1.2)，以及至少满足(14.1.1)和(14.1.2)之一的Q过程分别叫做$B\cap F$型，$\overline{B\cup F}$型，$\bar{B}$型，$\bar{F}$型，$\bar{B}\cap F$型，$B\cap\bar{F}$型以及$B\cup F$型Q过程；为了方便，把任一Q过程叫做O型Q过程；把不断的B型，不断的F型，不断的$B\cap F$型，不断的$\overline{B\cup F}$型，不断的O型，不断的$\bar{B}$型，不断的$\bar{F}$型，不断的$\bar{B}\cap F$型，不断的$B\cap\bar{F}$型以及不断的$B\cup F$型Q过程分别叫做$N\text{-}B$型，$N\text{-}F$型，$N\text{-}B\cap F$型，$N\text{-}\overline{B\cup F}$型，$N\text{-}O$型，$N\text{-}\bar{B}$型，$N\text{-}\bar{F}$型，$N\text{-}\bar{B}\cap F$型，$N\text{-}B\cap\bar{F}$型，以及$N\text{-}B\cup F$型$Q$过程．凡二十种．

对任给的一个Q矩阵，有下列定性问题需要解决：上述二十

种类型的Q过程的每一种类型不存在、恰好存在一个、有多个但有限以及有无穷多个这种类型的Q过程这四种情况那些情况是必然不出现的，那些是必然出现的，那些是可能出现的，以及使可能出现的情况必然实现的充要条件是什么？

关于定性问题的研究情况如下：

（一）Doob 在[24]中曾证明：O型Q过程总存在，而且只有两种可能，或者只存在一个，或者有无穷多个．在第十二章中我们给出了O型Q过程唯一的充要条件．

（二）Doob 在[24]中曾证明，B型和F型Q过程总存在，Reuter 在[27]中给出恰好存在一个B型（F型）Q过程的充要条件，并且证明在B型（F型）Q过程非唯一时就有无穷个B型（F型）Q过程．在§12.5中我们实际上给出了恰好存在一个F型Q过程的新的充要条件．

（三）Reuter 在[27]中曾证明，对$N-F$型Q过程只有三种可能，或者不存在，或者恰好有一个，或者有无穷多个，并且给出了这三种情况每种发生的充要条件．

此外还有些零星的结果．

作者在上述已有工作的基础上，对此定性问题进行了较细致地研究．本章的目的就在于给出这个问题的全部解答．为了完整起见（但也不增加多大篇幅），把上述已有结果同作者的新近成果，一并总结为二十个定理，每个定理专论一种类型的Q过程．但在证明过程中，凡属已有结果，都随处予以指明并不加证明地加以引用．

§14.2. 结果的陈述

定理 14.2.1. 设任给一个Q矩阵，则

（1）B型Q过程总存在，而且只有两种可能，或者只存在一个，或者有无穷多个；

（2）B型Q过程唯一的充要条件是方程

$$\left.\begin{aligned}&\lambda\mathbf{U}-\mathbf{U}Q=\mathbf{0}_l \quad \lambda>0\\&\mathbf{0}_l\leqslant\mathbf{U}\leqslant\mathbf{1}\end{aligned}\right\}\qquad(14.2.1)$$

只有零解.

定理 14.2.2. 设任给一个 Q 矩阵,则

(1) F 型 Q 过程总存在,而且只有两种可能,或者只存在一个或者有无穷多个;

(2) F 型 Q 过程唯一的充要条件是最小 Q 过程不断或方程

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda\mathbf{n}-\mathbf{n}Q=\mathbf{0}_-, & \lambda>0\\ \mathbf{0}_-\leqslant\mathbf{n}, & \mathbf{n}\mathbf{1}<+\infty\end{array}\right\}\tag{14.2.2}$$

只有零解,或等价地,最小 Q 过程不断或对(14.2.2)的任一解 $\mathbf{n}_\lambda=(n_\lambda(1),n_\lambda(2)\cdots)$, 必有 $\sum\limits_{j\in E}\left(\sum\limits_{k\neq j}q_{jk}\right)n_\lambda(j)<+\infty$.

定理 14.2.3. 设任给一个 Q 矩阵,则

(1) 对于 $B\cap F$ 型 Q 过程总存在,而且只有两种可能,或者只存在一个,或者有无穷多个.

(2) $B\cap F$ 型 Q 过程唯一的充要条件是方程

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda\mathbf{U}-Q\mathbf{U}=\mathbf{0}_|, & \lambda>0\\ \mathbf{0}_|\leqslant\mathbf{U}\leqslant\mathbf{1}\end{array}\right\}\tag{14.2.3}$$

和方程

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda\mathbf{n}-\mathbf{n}Q=\mathbf{0}_-, & \lambda>0\\ \mathbf{0}_-\leqslant\mathbf{n}, & \mathbf{n}\mathbf{1}<+\infty\\ \sum\limits_{j\in E}\left(q_j-\sum\limits_{k\neq j}q_{jk}\right)n(j)<+\infty\end{array}\right\}\tag{14.2.4}$$

至多其一有非零解.

定理 14.2.4. 设任给一个 Q 矩阵,则

(1) 对于 $\overline{B\cup F}$ 型 Q 过程,只有两种可能,或者不存在,或者有无穷多个;

(2) 若 Q 保守,则 $\overline{B\cup F}$ 型 Q 过程不存在;

(3) 若 Q 非保守,则 $\overline{B\cup F}$ 型 Q 过程不存在的充要条件是下列两条同时成立

(i)

$$\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)=n_\lambda>0,\quad 0<\lambda<+\infty\tag{14.2.5}$$

(ii)

$$\sum_{j\in E}\left(q_j-\sum_{k\neq j}q_{jk}\right)n_\lambda(j)<+\infty,\quad 0<\lambda<+\infty \tag{14.2.6}$$

其中 $\mathbf{n}_\lambda=(n_\lambda(1),\ n_\lambda(2),\ \cdots)$ 是方程

$$\left.\begin{aligned}&\lambda\mathbf{n}_\lambda-\mathbf{n}_\lambda Q=\mathbf{0}_-,\quad \lambda>0\\&\mathbf{0}_-\leqslant\mathbf{n}_\lambda,\quad \mathbf{n}_\lambda\mathbf{1}<+\infty\\&\mathbf{n}_\lambda-\mathbf{n}_\mu+(\lambda-\mu)\cdot\mathbf{n}_\mu P_\lambda^{\min}=\mathbf{0}_-\end{aligned}\right\}\tag{14.2.7}$$

的任一解.

(4) (3) 中条件 (i) 成立的充要条件是下列两条同时成立:

(i)′

$$\inf_{i\in\dot{E}}\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)>0\quad(0<\lambda<+\infty)\tag{14.2.8}$$

其中 $\dot{E}=\left(i:\ \sum_{j\in E}q_{ij}<0\right)$.

(i)″ 方程 (14.2.1) 只有零解.

而 (3) 中条件 (ii) 可用下列条件代替:

(ii)′

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\sum_{j\in E}n_\lambda(j)<+\infty\tag{14.2.9}$$

定理 14.2.5. 设任给一个 Q 矩阵,则

(1) O 型 Q 过程总存在，而且只有两种可能，或者只存在一个,或者有无穷多个;

(2) O 型 Q 过程唯一的充要条件是下列两条同时成立:

(i) 定理 14.2.4 中的条件 (i). 或等价地，定理 14.2.4 中的条件 (i)′ 和条件 (i)″;

(ii) 最小 Q 过程不断或方程 (14.2.2) 只有零解. 或等价地，最小 Q 过程不断或对 (14.2.2) 的任一解

$\mathbf{n}_\lambda=(n_\lambda(1),\ n_\lambda(2),\ \cdots)$ 必有

$$\sum_{j\in E}\left(\sum_{k\neq j}q_{ik}\right)n_\lambda(j)<+\infty\tag{14.2.10}$$

定理 14.2.6. 设任给一个 Q 矩阵,对于 N-B 型 Q 过程,则

(1) 只有三种可能：或者不存在，或者恰好存在一个，或者有无穷多个.

(2) 若Q非保守，则$N-B$型Q过程不存在.

(3) 若Q保守且Q过程唯一，则$N-B$型Q过程唯一；

(4) 若Q保守但Q过程不唯一，则有无穷多个$N-B$型Q过程.

定理 14.2.7. 设任给一个Q矩阵，则

(1) 对于$N-F$型Q过程，只有三种可能：或者不存在，或者恰好存在一个，或者有无穷多个.

(2) 若Q保守，O型Q过程非唯一以及方程(14.2.2)只有零解，或Q非保守且(14.2.2)只有零解，则$N-F$型Q过程不存在.

(3) 若Q保守且O型Q过程唯一或(14.2.2)恰有一个线性独立解，则$N-F$型Q过程唯一.

(4) 若最小Q过程中断且(14.2.2)有多于一个线性独立解，则$N-F$型Q过程有无穷多个.

定理 14.2.8. 设任给一个矩阵，则

(1) 对于$N-B\cap F$型Q过程，有三种可能. 或者不存在，或者只有一个，或者有无穷多个.

(2) 若Q非保守，或者Q保守且O型Q过程非唯一而F型Q过程唯一，则$N-B\cap F$型Q过程不存在.

(3) 若Q保守且O型Q过程唯一，或Q保守而O型Q过程非唯一但方程(14.2.2)有一个线性独立解，则$N-B\cap F$型Q过程唯一.

(4) 若Q保守而O型Q过程非唯一但方程(14.2.2)有多于一个线性独立解，则$N-B\cap F$型Q过程有无穷多个.

定理 14.2.9. 设任给一个Q矩阵，则

(1) 对于$N-\overline{B\cup F}$型Q过程，只有两种可能：或者不存在，或者有无穷多个.

(2) $N-\overline{B\cup F}$型Q过程不存在的充要条件是$\overline{B\cup F}$型Q过程不存在.

定理 14.2.10. 设任给一个 Q 矩阵,则

(1) 对于 N-O 型 Q 过程,只有三种可能:或者不存在,或者有一个,或者有无穷多个.

(2) 若 Q 非保守且 Q 过程唯一,则 N-O 型 Q 过程不存在.

(3) 若 Q 保守且 Q 过程唯一,或 Q 非保守且下列二条同时成立,则 N-O 型 Q 过程唯一:

(a) (14.2.5) 成立;

(b) 方程 (14.2.2) 恰有一个线性独立解 $\mathbf{n}_\lambda = (n_\lambda(1), n_\lambda(2), \cdots)$,且

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \sum_{j\in E} n_\lambda(j) < +\infty \qquad (14.2.11)$$

(4) 若 Q 保守,且 Q 过程非唯一,或 Q 非保守且 (14.2.5) 不成立,或 Q 非保守且下列二条同时成立,则 N-O 型 Q 过程有无穷多个:

(α) (14.2.5) 成立;

(β) 方程 (14.2.2) 有多于一个线性独立解,或方程(14.2.2)恰有一个线性独立解 $\mathbf{n}_\lambda = (n_\lambda(1), n_\lambda(2)\cdots)$ 且

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \sum_{j\in E} n_\lambda(j) = +\infty \qquad (14.2.12)$$

定理 14.2.11. 设任给一个 Q 矩阵,则

(1) 对于 $\bar{B}$ 型 Q 过程,只有两种可能,或者不存在,或者有无穷多个.

(2) $\bar{B}$ 型 Q 过程不存在的充要条件是:或者 Q 保守,或者 Q 非保守且 Q 过程唯一.

定理 14.2.12. 设任给一个 Q 矩阵,则

(1) 对于 $\bar{F}$ 型 Q 过程,只有两种可能,或者不存在,或者有无穷多个.

(2) $\bar{F}$ 型 Q 过程不存在的充要条件是 $\overline{B\cup F}$ 型 Q 过程不存在.

定理 14.2.13. 设任给一个 Q 矩阵,则

(1) 对于 $\bar{B}\cap F$ 型 Q 过程，只有两种可能，或者不存在，或者有无穷多个.

(2) 存在 $\bar{B}\cap F$ 型 Q 过程的充要条件是下列两条同时成立:

(i) Q 非保守;

(ii) 方程(14.2.2)有非零解.

定理 14.2.14. 设任给一个 Q 矩阵，则

(1) 对于 $B\cap\bar{F}$ 型 Q 过程，只有两种可能，或者不存在，或者有无穷多个.

(2) 不存在 $B\cap\bar{F}$ 型 Q 过程的充要条件是方程(14.2.1)只有零解.

定理 14.2.15. 设任给一个 Q 矩阵，则

(1) $B\cup F$ 型 Q 过程总存在，而且只有两种可能，或者只有一个，或者有无穷多个.

(2) $B\cup F$ 型 Q 过程唯一的充要条件是 B 型和 F 型 Q 过程均唯一.

定理 14.2.16. 设任给一个 Q 矩阵，则

(1) 对于 N-$\bar{B}$ 型 Q 过程，只有三种可能，或者不存在，或者存在一个，或者有无穷多个.

(2) 若 Q 保守，或 Q 非保守且 Q 过程唯一，则 N-$\bar{B}$ 型 Q 过程不存在；若 Q 非保守且

(a) (14.2.5)成立;

(b) 方程(14.2.2)有一个线性独立解 $\mathbf{n}_\lambda=(n_\lambda(1), n_\lambda(2), \cdots)$，且

$$\sum_{j\in E}\left(q_j-\sum_{k\neq j}q_{jk}\right)n_\lambda(j)<+\infty \quad 0<\lambda<+\infty \quad (14.2.13)$$

则恰有一个 N-$\bar{B}$ 型 Q 过程；在其余的情况下存在无穷多个 N-$\bar{B}$ 型 Q 过程.

定理 14.2.17. 设任给一个 Q 矩阵，则

(1) 对于 N-$\bar{F}$ 型 Q 过程，只有两种可能，或者不存在，或者有无穷多个.

(2) $N\text{-}\bar{F}$ 型 Q 过程不存在的充要条件是 $N\text{-}\overline{\bar{B}\cup F}$ 型 Q 过程不存在.

定理 14.2.18. 设任给一个 Q 矩阵,则

(1) 对于 $N\text{-}\bar{B}\cap F$ 型 Q 过程,只有三种可能,或者不存在,或者恰有一个,或者有无穷多个.

(2) 若 Q 保守, 或 Q 非保守且 $\bar{F}$ 型 Q 过程唯一, 则 $N\text{-}\bar{B}\cap F$ 型 Q 过程不存在; 若 Q 非保守且 $N\text{-}F$ 型 Q 过程唯一, 则恰有一个 $N\text{-}\bar{B}\cap F$ 型 Q 过程; 若 Q 非保守且 $N\text{-}F$ 型 Q 过程非唯一, 则有无穷多个 $N\text{-}\bar{B}\cap F$ 型 Q 过程.

定理 14.2.19. 设任给一个 Q 矩阵,则

(1) 对于 $N\text{-}B\cap\bar{F}$ 型 Q 过程,只有两种可能,或者不存在,或者有无穷多个.

(2) 若 Q 保守且 Q 过程唯一, 或 Q 非保守, 则 $N\text{-}B\cap\bar{F}$ 型 Q 过程不存在. 若 Q 保守且 Q 过程非唯一,则存在无穷多个 $N\text{-}B\cap\bar{F}$ 型 Q 过程.

定理 14.2.20. 设任给一个 Q 矩阵,则

(1) 对于 $N\text{-}B\cup F$ 型 Q 过程,只有三种可能,或者不存在,或者恰有一个,或有无穷多个.

(2) 若 Q 非保守且方程 (14.2.2) 只有零解, 则 $N\text{-}B\cup F$ 型 Q 过程不存在;若 Q 保守且 Q 过程唯一, 或 Q 非保守且方程 (14.2.2) 恰有一个线性独立解, 则 $N\text{-}B\cup F$ 型 Q 过程唯一; 若 Q 保守且 Q 过程非唯一,或 Q 非保守且方程 (14.2.2) 有多于一个线性独立解, 则有无穷多个 $N\text{-}B\cup F$ 型 Q 过程.

下面我们只给出定理 14.2.1——定理 14.2.10 的证明. 关于定理 14.2.11 ——定理 14.2.20 的证明易由前十个定理以及证明它们时所采用的方法加以完成,故从略.

§ 14.3. *B* 型 *Q* 过程的构造问题的归结和 Doob 过程

本节的目的是把非保守情况下构造全部 B 型 Q 过程的问题归结为在保守情况下构造 (O 型) Q 过程的问题, 进而利用所得结果

构造出一类 Q 过程——Doob Q 过程. 这里的结果不仅用于证命题 14.4.1 和定理 14.2.2，而且有其独立存在的意义，故特设一节讨论.

设 $P(t)=(p_{ij}(t), i, j\in E)$ 是一个 B 型 Q 过程. $X(\omega)=\{x(t,\omega), t<\sigma(\omega)\}$ 是以 $P(t)$ 为转移概率矩阵的 Q 过程. 令

$$\hat{x}(t,\omega)=\begin{cases}x(t,\omega), & t<\sigma(\omega)\\ 0 & t\geqslant\sigma(\omega)\end{cases}\tag{14.3.1}$$

引理 14.3.1. $\hat{X}(\omega)=\{x(t,\omega), t\geqslant 0\}$ 是一个不断的齐次可列马尔可夫过程，其转移概率矩阵 $\hat{P}(t)=(\hat{p}_{ij}(t), i, j\in E\cup\{0\})$ 及密度矩阵 $\hat{Q}=(\hat{q}_{ij}, i, j\in E\cup\{0\})$ 如下唯一决定

$$\hat{p}_{ij}(t)=\begin{cases}p_{ij}(t) & (i, j\in E)\\ 1-\sum\limits_{k\in E}p_{ik}(t), & (i\in E, j=0)\\ 1, & (i=j=0)\\ 0, & (i=0, j\in E)\end{cases}\tag{14.3.2}$$

$$\hat{q}_{ij}=\begin{cases}q_{ij}, & (i, j\in E)\\ q_i-\sum\limits_{k\neq i}q_{ik}, & (i\in E, j=0)\\ 0 & (i=0, j\in(E\cup\{0\}))\end{cases}\tag{14.3.3}$$

证. 只需证明

$$\hat{q}_{i0}=q_i-\sum_{k\neq i}q_{ik}\quad(i\in E)\tag{14.3.4}$$

因为在 (14.3.4) 成立之下，其余结论显见成立.

令

$$E_1=(i: i\in E, q_i\neq 0)\tag{14.3.5}$$

$$E_2=(i: i\in E, q_i=0)\tag{14.3.6}$$

当 $i\in E_2$ 时，显见 (14.3.4) 成立，所以在下面总是在 $i\in E_1$ 之下来证明 (14.3.4) 的，不再随处申明.

以 $\tau^{(1)}(\omega)$ 表示 $X(\omega)$ 的第一个断点. 于是，由 [1, II, 定理 15.6] 知

$$P(x(\tau^{(1)})=j\mid x_0=i)=\frac{q_{ij}}{q_i}\quad(i\neq j)\tag{14.3.7}$$

由 [1, II, 定理 17.4] 及 $P(t)$ 是 B 型 Q 过程知

$$P(x(\tau^{(1)}) = +\infty \mid x_0 = i) = 0 \tag{14.3.8}$$

由 [1, II, 定理 5.5] 知

$$P(x(\tau^{(1)}) < +\infty \mid x_0 = i) = 1 \tag{14.3.9}$$

由 (14.3.7), (14.3.8) 以及 (14.3.9) 知

$$P(\tau^{(1)} = \sigma,\ \sigma < +\infty \mid x_0 = i)$$

$$= P(\tau^{(1)} < +\infty \mid x_0 = i) - \sum_{j \neq i} P(x(\tau^{(1)}) = j \mid x_0 = i)$$

$$= 1 - \sum_{j \neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} = \frac{q_i - \sum\limits_{j \neq i} q_{ij}}{q_i} \tag{14.3.10}$$

由 $\hat{X}(\omega)$ 的定义知, $\tau^{(1)}(\omega)$ 也是 $\hat{X}(\omega)$ 的第一个断点(在 $\hat{x}_0 = i$ 之下), $0 < \hat{q}_i = q_i < +\infty$ 以及

$$\lim_{t \to 0}{}^{*} \hat{p}_{00}(t) = 1. \tag{14.3.11}$$

由 (14.3.11) 和 [1, II, 定理 15.6] 知

$$P(\hat{x}(\tau^{(1)}) = 0 \mid \hat{x}_0 = i) = \frac{\hat{q}'_{i0}}{\hat{q}_i} \tag{14.3.12}$$

但

$$P(\hat{x}(\tau^{(1)}) = 0 \mid \hat{x}_0 = i) = P(\tau^{(1)} = \sigma,\ \sigma < +\infty \mid x_0 = i)$$

$$= \frac{q_i - \sum\limits_{k \neq i} q_{ik}}{q_i} \tag{14.3.13}$$

由 $\hat{q}_i = q_i$, (14.3.12) 和 (14.3.13) 立得 (14.3.4). 于是引理得证.

我们把上面由 Q 到 $\hat{Q}$ 的变换记作 L:

$$\hat{Q} = LQ \tag{14.3.14}$$

显见有

引理 14.3.2. $\hat{Q}$ 是一个保守的 Q 矩阵.

设 $\hat{P}(t) = (\hat{p}_{ij}(t),\ i,\ j \in E \cup \{0\})$ 是任一 $\hat{Q}$ 过程. 令

$$p_{ij}(t) = \hat{p}_{ij}(t) \quad (i,\ j \in E) \tag{14.3.15}$$

$$P(t) = (p_{ij}(t),\ i,\ j \in E) \tag{14.3.16}$$

我们把由 $\hat{P}(t)$ 得到 $P(t)$ 的这个变换记作 G:

$$P(t) = G\hat{P}(t) \tag{14.3.17}$$

命题 14.3.1. 设 $\hat{P}(t)$ 是一个 $\hat{Q}$ 过程,则

$$P(t) = G\hat{P}(t) \tag{14.3.18}$$

是一个 B 型 Q 过程;反之,设 $P(t)$ 是任一 B 型 Q 过程,则至少存在一个 $\hat{Q}$ 过程 $\hat{P}(t)$ 使(14.3.18)成立.

证. 由引理 14.3.1 知,只需证明命题的前半部分.

设 $\hat{P}(t) = (\hat{p}_{ij}(t);\ i, j \in E \cup \{0\})$ 是任一 $\hat{Q}$ 过程, $P(t) = (p_{ij}(t);\ i, j \in E)$ 由(14.3.18)所定义. 往证

$$P(t) \geqslant 0 \tag{14.3.19}$$

$$P(t)\mathbf{1} \leqslant \mathbf{1} \tag{14.3.20}$$

$$P(t) \cdot P(s) = P(t+s) \tag{14.3.21}$$

$$\lim_{t \to 0} P(t) = I \tag{14.3.22}$$

$$P'(0) = Q \tag{14.3.23}$$

$$P'(t) = QP(t) \tag{14.3.24}$$

显然只需证明(14.3.21)和(14.3.24). 注意(14.3.3)和(14.3.15), $\hat{Q}$ 保守以及

$$\hat{P}_{0j}(t) = 0 \quad (j \in E) \tag{14.3.25}$$

立得(14.3.24). 注意(14.3.25)立得(14.3.21). 故 $P(t)$ 是一个 B 型 Q 过程. 命题获证.

命题 14.3.2. 设 $\hat{P}(t)$ 是任一 $N\text{-}O$ 型 $\hat{Q}$ 过程,则(14.3.18)定义一个 B 型 Q 过程;反之,设 $P(t)$ 是任一 B 型 Q 过程,则恰好存在一个 $N\text{-}O$ 型 $\hat{Q}$ 过程 $\hat{P}(t)$ 使(14.3.18)成立.

证. 由引理 14.3.1, 命题 14.3.1 以及下述的简单事实立得我们的命题: 若 $\hat{P}(t) = (\hat{p}_{ij}(t);\ i, j \in E \cup \{0\})$ 是一个 $N\text{-}O$ 型 $\hat{Q}$ 过程,则 $\hat{p}_{i0}(t)$ $(i \in E)$ 和 $\hat{p}_{0j}(t)$ $(j \in E \cup \{0\})$ 为 $\hat{p}_{ij}(t)$ $(i, j \in E)$ 唯一决定.

以 D_Q 和 $D_{\hat{Q}}$ 分别表示方程

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \mathbf{U} - Q\mathbf{U} = \mathbf{0}_1 \quad \lambda > 0 \\ \mathbf{0}_1 \leqslant \mathbf{U} \leqslant \mathbf{1} \end{array}\right\} \tag{14.3.26}$$

和

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\hat{\mathbf{U}}-\hat{Q}\hat{\mathbf{U}}=\mathbf{0}_1, \quad \lambda>0 \\ \mathbf{0}_1\leqslant\hat{\mathbf{U}}\leqslant\mathbf{1}\end{array}\right\} \tag{14.3.27}$$

的解的全体.

设

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}u(1)\\u(2)\\\vdots\end{pmatrix} \tag{14.3.28}$$

是 D_Q 的任一元，令

$$\hat{\mathbf{U}}=\begin{pmatrix}\hat{u}(0)\\\hat{u}(1)\\\hat{u}(2)\\\vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\u(1)\\u(2)\\\vdots\end{pmatrix} \tag{14.3.29}$$

则由 $\mathbf{U}$ 得到 $\hat{\mathbf{U}}$ 的变换记为 W:

$$\hat{\mathbf{U}}=W\mathbf{U} \tag{14.3.30}$$

命题 14.3.3. 由 (14.3.30) 定义的变换 W 是由 D_Q 到 $D_{\hat{Q}}$ 上的一一变换，且 $\mathbf{0}_1=W\mathbf{0}_1$.

证. 由下列易直接验证的事实立得我们的命题. 若

$$\hat{\mathbf{U}}=\begin{pmatrix}\hat{u}(0)\\\hat{u}(1)\\\hat{u}(2)\\\vdots\end{pmatrix} \tag{14.3.31}$$

属于 $D_{\hat{Q}}$, 则 $\hat{u}(0)=0$.

令

$$u_\lambda(i)=1-\left(\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)+\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}\left(q_j-\sum_{k\neq j}q_{jk}\right)\right) \quad (i\in E) \tag{14.3.32}$$

$$\mathbf{U}_\lambda=\begin{pmatrix}u_\lambda(1)\\u_\lambda(2)\\\vdots\end{pmatrix} \tag{14.3.33}$$

引理 14.3.2. $\mathbf{U}_\lambda$ 是方程

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\mathbf{U}-\mathbf{U}Q=\mathbf{0}_1, \quad \lambda>0\\ \mathbf{0}_1\leqslant\mathbf{U}\leqslant\mathbf{1}\end{array}\right\} \tag{14.3.34}$$

的最大解，从而若(14.3.34)有非零解，则

$$\mathbf{U}_\lambda \neq \mathbf{0}_1 \tag{14.3.35}$$

证. 熟知，$\{p_{ij}^{\min}(\lambda), i\in E\}$ 是拟规格方程

$$x_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}x_k+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i} \quad (i\in E) \tag{14.3.36}$$

的最小非负解. 于是，由定理 3.3.2 知，$\mathbf{1}-\mathbf{U}_\lambda$ 是方程

$$x_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}x_k+\frac{\lambda}{\lambda+q_i}+\frac{q_i-\sum\limits_{k\neq i}q_{ik}}{\lambda+q_i} \quad (i\in E) \tag{14.3.37}$$

的最小非负解. 从而 $\mathbf{U}_\lambda$ 是(14.3.34)的最大解. 引理证毕.

命题 14.3.4. 若(14.3.34)有非零解，$\boldsymbol{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\geqslant\mathbf{0}_-$，$\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}_-$ 及 $\boldsymbol{a}\mathbf{1}\leqslant\mathbf{1}$，则

$$P_\lambda=P_\lambda^{\min}+\mathbf{U}_\lambda\frac{\boldsymbol{a}P_\lambda^{\min}}{1-\boldsymbol{a}\mathbf{U}_\lambda} \tag{14.3.38}$$

是一个 B 型 Q 过程.

证. 若 Q 保守，熟知，(14.3.38)给出一个 Doob Q 过程，若 Q 非保守，以 $\hat{P}_\lambda^{\min}=(\hat{p}_{ij}^{\min}(\lambda), i, j\in E\cup\{0\})$ 表示最小 $\hat{Q}$ 过程. 令

$$\hat{\boldsymbol{a}}=(0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots) \tag{14.3.39}$$

$$\hat{P}_\lambda=\hat{P}_\lambda^{\min}+(\mathbf{1}-\lambda\hat{P}^{\min}\mathbf{1})\frac{\hat{\boldsymbol{a}}P_\lambda^{\min}}{1-\boldsymbol{a}(\mathbf{1}-\lambda\hat{P}^{\min}\mathbf{1})} \tag{14.3.40}$$

熟知，$\hat{P}_\lambda$ 是 Doob $\hat{Q}$ 过程. 易证

$$p_{ij}(\lambda)=\hat{p}_{ij}(\lambda) \quad (\lambda>0, i, j\in E) \tag{14.3.41}$$

从而

$$p_{ij}(t)=\hat{p}_{ij}(t) \quad (t\geqslant 0, i, j\in E) \tag{14.3.42}$$

这里 $p_{ij}(t)$ 和 $\hat{p}_{ij}(t)$ 分别是 $p_{ij}(\lambda)$ 和 $\hat{p}_{ij}(\lambda)$ 的逆拉普拉斯变换.

由 $\hat{P}(t)=(\hat{p}_{ij}(t), i, j\in E\cup\{0\})$ 是 $\hat{Q}$ 过程，(14.3.42)和命题 14.3.1 知 $P(t)=(p_{ij}(t), i, j\in E)$，即 P_λ 是一个 B 型 Q 过程. 命

题证毕.

定义 14.3.1. 若方程 (14.3.34) 有非零解, 则由 (14.3.38) 定义的 B 型 Q 过程 P_λ 叫做 Doob 过程.

引理 14.3.3. 设

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_i \\ \vdots \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}_1, \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots), \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \cdots)$$

若

$$\boldsymbol{\rho\alpha} = \boldsymbol{\rho}\bar{\boldsymbol{\alpha}} \tag{14.3.43}$$

则

$$\boldsymbol{\alpha} = \bar{\boldsymbol{\alpha}} \tag{14.3.44}$$

证. 因 $\boldsymbol{\rho} \neq \mathbf{0}_1$, 故存在足码 $i_0 \in E$, 使

$$\rho_{i_0} \neq 0 \tag{14.3.45}$$

由 (14.3.43) 和 (14.3.45) 得

$$\rho_{i_0}\alpha_j = \rho_{i_0}\bar{\alpha}_j \quad (j \in E) \tag{14.3.46}$$

由 (14.3.45) 和 (14.3.46) 得

$$\alpha_j = \bar{\alpha}_j \quad (j \in E) \tag{14.3.47}$$

即 (14.3.44) 成立. 引理证毕.

命题 14.3.5. 若方程 (14.3.34) 有非零解, 则对于 Doob Q 过程

$$P_\lambda^{(i)} = P_\lambda^{\min} + \mathbf{U}_\lambda \frac{\boldsymbol{\alpha}^{(i)} P_\lambda^{\min}}{1 - \boldsymbol{\alpha}^{(i)}\mathbf{U}_\lambda} \quad (i = 1, 2) \tag{14.3.48}$$

有

$$P_\lambda^{(1)} \equiv P_\lambda^{(2)} \tag{14.3.49}$$

的充要条件是存在常数 r, 使

$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)} = r\boldsymbol{\alpha}^{(2)} \tag{14.3.50}$$

证. 由引理 14.3.3 知, (14.3.49) 成立的充要条件是

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}^{(1)} P_\lambda^{\min}}{1 - \boldsymbol{\alpha}^{(1)}\mathbf{U}_\lambda} = \frac{\boldsymbol{\alpha}^{(2)} P_\lambda^{\min}}{1 + \boldsymbol{\alpha}^{(2)}\mathbf{U}_\lambda} \tag{14.3.51}$$

将算子 $\lambda I - Q$ 右作用于上式两端, 注意 $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\mathbf{1} \leqslant 1$ $(i = 1, 2)$ 得

$$\frac{\alpha^{(1)}}{1-\alpha^{(1)}\mathbf{U}_\lambda}=\frac{\alpha^{(2)}}{1-\alpha^{(2)}\mathbf{U}_\lambda} \tag{14.3.52}$$

反之,将算子 $P_\lambda^{\min}$ 作用于上式两端即得(14.3.51). 所以(14.3.51)与(14.3.52)等价.

注意(14.3.48)式知

$$1-\alpha^{(i)}\mathbf{U}_\lambda\neq 0 \quad (i=1,\ 2) \tag{14.3.53}$$

所以,若令

$$\frac{1-\alpha^{(1)}\mathbf{U}_\lambda}{1-\alpha^{(2)}\mathbf{U}_\lambda}=r \tag{14.3.54}$$

则(14.3.52)就变成次之等价形式:

$$\alpha^{(1)}=r\alpha^{(2)} \tag{14.3.55}$$

于是命题得证.

命题 14.3.6. 设(14.3.34)有非零解. 若令

$$\alpha^{(n)}=(\underbrace{0,\ 0,\ \cdots,\ 0}_{(n-1)\text{个}},\ 1,\ 0,\ \cdots) \tag{14.3.56}$$

则

$$P_\lambda^{(n)}=P_\lambda^{\min}+\mathbf{U}_\lambda\frac{\alpha^{(n)}P_\lambda^{\min}}{1-\alpha^{(n)}\mathbf{U}_\lambda} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \tag{14.3.57}$$

是无穷多个彼此不同的 B 型 Q 过程.

证. 由命题(14.3.4)和命题 14.3.5 立得我们的命题.

§ 14.4. $B\cap F$ 型 Q 过程的构造问题的归结

本节的目的是把非保守情况下构造全部 $B\cap F$ 型 Q 过程的问题归结为在保守情况下构造全部 F 型 Q 过程的问题. 这里的结果不仅用于证明定理 12.2.3, 而且(与 §14.3 的结果一样)有其独立存在的意义,故特设一节讨论.

命题 14.4.1. 设 $\hat{P}(t)$ 是任一 F 型 $\hat{Q}$ 过程,则

$$P(t)=G\hat{P}(t) \tag{14.4.1}$$

是一个 $B\cap F$ 型 Q 过程; 反之, 设 $P(t)$ 是任一 $B\cap F$ 型 Q 过程,则恰好存在一个 F 型 $\hat{Q}$ 过程 $\hat{P}(t)$ 使(14.4.1)成立. 关于 $\hat{Q}$, G 的定

义见 § 14.3.

为了证明命题 14.4.1，首先证明几个引理.

引理 14.4.1. 设 $\hat{P}(t)$ 是任一 F 型 $\hat{Q}$ 过程，则由(14.4.1)定义的 $P(t)$ 是一个 $B\cap F$ 型 Q 过程.

证. 由 $\hat{P}(t)=(\hat{p}_{ij}(t),\ i,\ j\in E)$ 是一个 F 型$\hat{Q}$过程及 $\hat{q}_{0j}=0$ $(j\in E)$ 得

$$p'_{ij}(t)=\hat{p}'_{ij}(t)=\sum_{k\in E\cup\{0\}}\hat{p}_{ik}(t)\hat{q}_{kj}=\sum_{k\in E}\hat{p}_{ik}(t)\hat{q}_{kj}+\hat{p}_{i0}(t)\hat{q}_{0j}$$

$$=\sum_{k\in E}p_{ik}(t)q_{kj}\quad(i,\ j\in E)\tag{14.4.2}$$

于是由 $\hat{Q}$ 保守及命题 14.3.1 立得我们的引理.

引理 14.4.2. 设 $\hat{P}(t)=(\hat{p}_{ij}(t),\ i,\ j\in E\cup\{0\})$ 是一个 F 型 $\hat{Q}$ 过程，则 $\hat{P}(t)$ 为 $(\hat{p}_{ij}(t),\ i,\ j\in E)$ 唯一决定.

证. 由 $\hat{Q}$ 保守知

$$\hat{P}'(t)=\hat{P}(t)\hat{Q}\tag{14.4.3}$$

$$\hat{P}'(t)=\hat{Q}\hat{P}(t)\tag{14.4.4}$$

再注意 $\hat{Q}$ 的定义得

$$\hat{p}'_{i0}(t)=\sum_{k\in E}\hat{p}_{ik}(t)q_{k0}\quad(i\in E)\tag{14.4.5}$$

$$\hat{p}'_{0j}(t)=0\quad(j\in E\cup\{0\})\tag{14.4.6}$$

若 $(\hat{p}_{ij}(t),\ i,\ j\in E)$ 为已知，再加上初始条件 $\hat{p}_{i0}(0)=0\ (i\in E)$、$\hat{p}_{00}(0)=1$ 及 $\hat{p}_{0j}(0)=0\ (j\in E)$，则由 (14.4.5) 和 (14.4.6) 就可把 $\hat{p}_{i0}(t)\ (i\in E)$ 和 $\hat{p}_{0j}(t)\ (j\in E\cup\{0\})$ 唯一决定. 于是引理得证.

引理 14.4.3. 设 $P(t)$ 是任一 $B\cap F$ 型 Q 过程，则至少存在一个 F 型 $\hat{Q}$ 过程 $\hat{P}(t)$ 使 (14.4.1) 成立.

证. 令

$$\hat{p}_{ij}(t)=\begin{cases}p_{ij}(t) & (i,\ j\in E)\\ 1 & (i=j=0)\\ 0 & (i=0,\ j\in E)\\ \int_0^t\left(\sum_{k\in E}p_{ik}(s)q_{k0}\right)ds & (i\in E,\ j=0)\end{cases}\tag{14.4.7}$$

$$\hat{P}(t)=(\hat{p}_{ij}(t);\ i,j\in E\cup\{0\}) \tag{14.4.8}$$

往证由(14.4.8)定义的 $\hat{P}(t)$ 就是一个使(14.4.1)成立的 F 型 $\hat{Q}$ 过程.

由命题 14.3.1 的第二部分的证明过程知，$\bar{P}(t)=(\bar{p}_{ij}(t),\ i,j\in E)$ 是一个 $\hat{Q}$ 过程，其中

$$\bar{p}_{ij}(t)=\begin{cases} p_{ij}(t) & (i,j\in E)\\ 1-\sum\limits_{k\in E}p_{ik}(t) & (i\in E, j=0)\\ 1 & (i=j=0)\\ 0 & (i=0, j\in E)\end{cases} \tag{14.4.9}$$

于是由 [1, II § 17] 及 $\bar{q}_{00}=0<+\infty$ 知

$$\sum_{k\in E\cup\{0\}}\bar{p}_{ik}(t)q_{k0}<+\infty\ (i\in E,\ 0\leqslant t<+\infty) \tag{14.4.10}$$

由(14.4.9),(14.4.10)和 $\hat{Q}$ 的定义得

$$\sum_{k\in E}p_{ik}(t)q_{k0}=\sum_{k\in E\cup\{0\}}\bar{p}_{ik}(t)\hat{q}_{k0}<+\infty\ \ (i\in E,\ 0\leqslant t<+\infty) \tag{14.4.11}$$

于是 $\hat{P}(t)$ 由(14.4.7)唯一确定.

注意 $q_{k0}\geqslant 0$ $(k\in E)$ 立知

$$\hat{p}_{ij}(t)\geqslant 0\quad (i,j\in E\cup\{0\}) \tag{14.4.12}$$

由(14.4.7)得

$$\sum_{k\in E\cup\{0\}}\hat{p}_{0k}(t)=\hat{p}_{00}(t)=1 \tag{14.4.13}$$

由 $\bar{P}(t)$ 是一个 $\hat{Q}$ 过程和 [1, II, § 17] 知

$$\bar{p}'_{i0}(t)\geqslant\sum_{k\in E\cup\{0\}}\bar{p}_{ik}(t)q_{k0}=\sum_{k\in E}p_{ik}(t)q_{k0}\geqslant 0$$

$$(i\in E,\ 0\leqslant t<+\infty) \tag{14.4.14}$$

由(14.4.14), $\bar{p}_{i0}(0)=0$ $(i\in E)$ 得

$$\bar{p}_{i0}(t)\geqslant\int_0^t\left(\sum_{k\in E}p_{ik}(s)q_{k0}\right)ds\quad (i\in E,\ 0\leqslant t<+\infty) \tag{14.4.15}$$

由(14.4.9)和(14.4.15)得

$$1-\sum_{k\in E} p_{ik}(t)=p_{i0}(t)\geqslant\int_0^t\left(\sum_{k\in E} p_{ik}(s)q_{k0}\right)ds$$

$$(i\in E,\ 0\leqslant t<+\infty) \tag{14.4.16}$$

由(14.4.7)和(14.4.16)得

$$\sum_{k\in E\cup\{0\}} \hat{p}_{ik}(t)\leqslant 1 \quad (i\in E) \tag{14.4.17}$$

综合(14.4.12),(14.4.13)和(14.4.17)得

$$\hat{P}(t)\geqslant 0 \tag{14.4.18}$$

$$\hat{P}(t)\mathbf{1}\leqslant\mathbf{1} \tag{14.4.19}$$

由$P(t)$为一个$B\cap F$型Q过程和$\hat{Q}$的定义容易直接验证下列四式成立:

$$\hat{P}(t+s)=\hat{P}(t)\hat{P}(s) \tag{14.4.20}$$

$$\lim_{t\to 0}\hat{P}(t)=I \tag{14.4.21}$$

$$\hat{P}'(0)=\hat{Q} \tag{14.4.22}$$

$$\hat{P}'(t)=\hat{P}(t)\hat{Q} \tag{14.4.23}$$

所以$\hat{P}(t)$是一个F型$\hat{Q}$过程. 由(14.4.7)和G之定义显见(14.4.1)成立.

至此,引理获证.

命题 14.4.1 的证明. 由引理 14.4.1—14.4.3,立得我们的命题.

§14.5. 定理 14.2.1—定理 14.2.3 的证明

定理 14.2.1 的证明. 定理 14.2.1 的第二部分是 Reuter[27] 的结果. 熟知,最小Q过程是B型Q过程,所以B型Q过程总存在;由我们的定理的第二部分和命题 14.3.6 知,当B型Q过程非唯一时就有无穷多个B型Q过程存在,于是定理的第一部分获证.

定理 14.2.2 的证明. 熟知,最小Q过程是F型Q过程,故F型Q过程总存在. 定理的第一部分的后半部分和第二部分的第一部分是 Reuter[27] 的结果. 定理的第二部分的后半部分是第二部分的前半部分和引理 12.5.1 的直接推论. 于是定理真.

定理 14.2.3 的证明．由命题 14.4.1 和定理 14.2.2 立得我们的定理．

§14.6. 定理 14.2.4 的证明及其应用举例

首先证明几个引理．

引理 14.6.1. 对一切 $i\in E$ 有

$$u_\lambda(i)=1-\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)\downarrow 0\quad(\lambda\uparrow+\infty)\qquad(14.6.1)$$

证．由引理 12.2.2 知，当 λ 增加时 $u_\lambda(i)$ 不增．由引理 12.2.1 的证明过程知，$\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)(i\in E)$ 是拟规格方程

$$x_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}x_k+\frac{\lambda}{\lambda+q_i}\quad(i\in E)\qquad(14.6.2)$$

的最小非负解，于是

$$\frac{\lambda}{\lambda+q_i}\leqslant\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)\leqslant 1\quad(i\in E)\qquad(14.6.3)$$

从而

$$\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)\uparrow 1\quad(i\in E)\qquad(14.6.4)$$

于是(14.6.1)成立．引理证毕．

引理 14.6.2.

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda u_\lambda(i)=q_i-\sum_{j\neq i}q_{ij}\quad(i\in E)\qquad(14.6.5)$$

证．由引理 12.2.2 的证明过程知

$$\lambda u_\lambda(i)=-q_iu_\lambda(i)+\sum_{j\neq i}q_{ij}u_\lambda(j)+q_i-\sum_{j\neq i}q_{ij}\quad(i\in E)\qquad(14.6.6)$$

于是由引理 12.6.1 立得所欲证．

引理 14.6.3. 设 $\mathbf{n}_\lambda=(n_\lambda(1),n_\lambda(2),\cdots)$是(14.2.7)的任一解，则对一切 $\mu>0$ 有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\sum_{j\in E}n_\lambda(j)\geqslant\mu\sum_{j\in E}n_\mu(j)+\sum_{j\in E}\left(q_j-\sum_{k\neq j}q_{jk}\right)n_\mu(j)\qquad(14.6.7)$$

从而若对某个 μ 有

$$\sum_{j\in E}\left(q_j-\sum_{k\neq j}q_{jk}\right)n_\mu(j)=+\infty \tag{14.6.8}$$

则有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\sum_{j\in E}n_\lambda(j)=+\infty \tag{14.6.9}$$

证. 由

$$\mathbf{n}_\lambda-\mathbf{n}_\mu+(\lambda-\mu)\mathbf{n}_\mu P_\lambda^{\min}=\mathbf{0}_- \tag{14.6.10}$$

知

$$\begin{aligned}\lambda\sum_{j\in E}n_\lambda(j)&=\lambda\sum_{j\in E}n_\mu(j)+(\mu-\lambda)\sum_{i\in E}n_\mu(i)\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(\lambda)\\&=\lambda\sum_{j\in E}n_\mu(j)+(\mu-\lambda)\sum_{i\in E}n_\mu(i)(1-u_\lambda(i))\\&=\mu\sum_{j\in E}n_\mu(j)+(\lambda-\mu)\sum_{i\in E}n_\mu(i)u_\lambda(i)\\&=\mu\sum_{j\in E}n_\mu(j)+\sum_{i\in E}n_\mu(i)\lambda u_\lambda(i)-\mu\sum_{i\in E}n_\mu(i)u_\lambda(i)\end{aligned} \tag{14.6.11}$$

由(14.6.11)，引理 14.6.1 和引理 14.6.2，立得所欲证.

引理 14.6.4. 若 Q 非保守，且定理 14.2.4 中的条件 (i) 不成立，则存在无穷多个 $N\text{-}\overline{B\cup F}$ 型 Q 过程.

证. 若定理 14.2.4 中的条件(i)不成立，于是由引理 12.2.4 知，存在与 λ 无关的行矢量 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha(1),\alpha(2),\cdots)>\mathbf{0}_-$，使 $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{P}_\lambda^{\min}>\mathbf{0}_-$ $(0<\lambda<+\infty)$可和，而 $\boldsymbol{\alpha}$ 不可和，得知

$$\frac{\left(-\sum_{j\in E}q_{ij}\right)\alpha_j}{\sum_{k\in E}\alpha_k}=0\quad(i,j\in E) \tag{14.6.12}$$

于是，由 [28] 知

$$P_\lambda=P_\lambda^{\min}+\frac{(\mathbf{1}-\lambda P_\lambda^{\min}\mathbf{1})}{\lambda\boldsymbol{\alpha}P_\lambda^{\min}\mathbf{1}}\cdot\boldsymbol{\alpha}P_\lambda^{\min} \tag{14.6.13}$$

是一个 Q 过程，而且是不断的，即是 $N\text{-}O$ 型 Q 过程.

现在证明，由(14.6.13)确定的 Q 过程不是 B 型 Q 过程. 为此，

只需证明

$$\lambda P_\lambda - QP_\lambda - I \neq 0 \tag{14.6.14}$$

其中 I 是单位矩阵．事实上

$$\lambda P_\lambda - QP_\lambda - I = \lambda\left(P_\lambda^{\min} + \frac{\mathbf{1} - \lambda P_\lambda^{\min}\mathbf{1}}{\lambda \boldsymbol{\alpha} P_\lambda^{\min}\mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{\alpha} P_\lambda^{\min}\right)$$

$$- Q\left(P_\lambda^{\min} + \frac{\mathbf{1} - \lambda P_\lambda^{\min}\mathbf{1}}{\lambda \boldsymbol{\alpha} P_\lambda^{\min}\mathbf{1}} \boldsymbol{\alpha} P_\lambda^{\min}\right) - I = (\lambda P_\lambda^{\min} - QP_\lambda^{\min}$$

$$- I) + (\lambda(\mathbf{1} - P_\lambda^{\min}\mathbf{1}) - Q(\mathbf{1} - P_\lambda^{\min}\mathbf{1}))\frac{\boldsymbol{\alpha} P_\lambda^{\min}}{\lambda \boldsymbol{\alpha} P_\lambda^{\min}\mathbf{1}} \tag{14.6.15}$$

由 $P_\lambda^{\min}$ 是 B 型 Q 过程，故

$$\lambda P_\lambda^{\min} - QP_\lambda^{\min} - I = 0 \tag{14.6.16}$$

而

$$\boldsymbol{\alpha} P_\lambda^{\min} > \mathbf{0} \tag{14.6.17}$$

$$\lambda \boldsymbol{\alpha} P_\lambda^{\min}\mathbf{1} > 0 \tag{14.6.18}$$

由定理 14.2.4 中的条件 (i) 知

$$\mathbf{1} - \lambda P_\lambda^{\min}\mathbf{1} \neq \mathbf{0}, \tag{14.6.19}$$

由(14.6.6)及 Q 非保守知

$$\lambda(\mathbf{1} - \lambda P_\lambda^{\min}\mathbf{1}) - Q(\mathbf{1} - \lambda P_\lambda^{\min}\mathbf{1}) = \begin{pmatrix} -\sum_{j\in E} q_{1j} \\ -\sum_{j\in E} q_{2j} \\ \vdots \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}, \tag{14.6.20}$$

由 (14.6.15)—(14.6.20) 知 (14.6.14) 成立．故 P_λ 不是 B 型 Q 过程．

现在证明 P_λ 也不是 F 型 Q 过程．为此，只需证明

$$\lambda P_\lambda - P_\lambda Q - I \neq 0 \tag{14.6.21}$$

事实上

$$\lambda P_\lambda - P_\lambda Q - I = \lambda\left(P_\lambda^{\min} + \frac{\mathbf{1} - \lambda P_\lambda^{\min}\mathbf{1}}{\lambda \boldsymbol{\alpha} P_\lambda^{\min}\mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{\alpha} P_\lambda^{\min}\right)$$

$$- \left(P_\lambda^{\min} + \frac{\mathbf{1} - \lambda P_\lambda^{\min}\mathbf{1}}{\lambda \boldsymbol{\alpha} P_\lambda^{\min}\mathbf{1}} \boldsymbol{\alpha} P_\lambda^{\min}\right) Q - I$$

$$= (\lambda P_\lambda^{\min} - P_\lambda^{\min} Q - I) + \frac{1 - \lambda P_\lambda \mathbf{1}}{\lambda \boldsymbol{\alpha} P_\lambda^{\min} \mathbf{1}}$$

$$\cdot \boldsymbol{\alpha}(\lambda P_\lambda^{\min} - P_\lambda^{\min} Q) \tag{14.6.22}$$

因 $P_\lambda^{\min}$ 是 F 型 Q 过程，所以

$$\lambda P_\lambda^{\min} - P_\lambda^{\min} Q - I = 0 \tag{14.6.23}$$

由 (14.6.22) 和 (14.6.23) 得

$$\lambda P_\lambda - P_\lambda Q - I = \frac{(\mathbf{1} - \lambda P_\lambda^{\min} \mathbf{1}) \boldsymbol{\alpha}}{\lambda \boldsymbol{\alpha} P_\lambda^{\min} \mathbf{1}} \tag{14.6.24}$$

由 (14.6.18),(14.6.19)以 及 (14.6.24) 和 $\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}_-$ 立得 (14.6.21). 所以 P_λ 也不是 F 型 Q 过程.

至此，我们得知，由(14.6.13)确定的 Q 过程 P_λ 是 $N\text{-}\overline{B \cup F}$ 型 Q 过程.

令

$$\alpha^{(n)}(i) = \begin{cases} \alpha(1) + 2^{-n}, & i = 1 \\ \alpha(i), & i \neq 1 \end{cases} \tag{14.6.25}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(n)} = (\alpha^{(n)}(1), \alpha^{(n)}(2), \cdots) \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{14.6.26}$$

于是，由上述论证知，对任一自然数 n

$$P_\lambda^{(n)} = P_\lambda^{\min} + \frac{1 - \lambda P_\lambda^{\min} \mathbf{1}}{\lambda \boldsymbol{\alpha}^{(n)} P_\lambda \mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(n)} P_\lambda^{\min} \tag{14.6.27}$$

是一个 $N\text{-}O$ 型 Q 过程. 参考命题 14.3.6 和命题 14.3.6 的证明，易证 $P_\lambda^{(n)} (n = 1, 2, \cdots)$是无穷多个彼此不同的 $N\text{-}\overline{B \cup F}$ 型 Q 过程. 于是，引理得证.

引理 14.6.5. 若 Q 非保守，且定理 14.2.4 中的条件 (ii)′ 不成立，则存在无穷多个 $N\text{-}\overline{B \cup F}$ 型 Q 过程.

证. 由条件 (ii)′ 不成立知，在 (14.2.7) 的一切解中至少存在一个解 $\mathbf{n}_\lambda = (n_\lambda(1), n_\lambda(2), \cdots)$, 使

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \sum_{j \in E} n_\lambda(j) = +\infty \tag{14.6.28}$$

任选一行矢量 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha(1), \alpha(2), \cdots) > \mathbf{0}_-$, 使 $\boldsymbol{\alpha} P_\lambda^{\min}$ 可和(这总能办得到，如选 $\alpha(i) = 2^{-i} (i \in E)$). 由 (14.6.28) 知

$$\frac{\left(-\sum_{k\in E} q_{ik}\right)\alpha(j)}{\sum_{k\in E}\alpha(k)+\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\sum_{k\in E}n_\lambda(k)}=0 \quad (i,j\in E) \quad (14.6.29)$$

于是由[28]知

$$P_\lambda = P_\lambda^{\min} + \frac{(\mathbf{1}-\lambda P_\lambda^{\min}\mathbf{1})}{\lambda(\boldsymbol{a}P_\lambda^{\min}+\mathbf{n}_\lambda)\mathbf{1}}(\boldsymbol{a}P_\lambda^{\min}+\mathbf{n}_\lambda) \quad (14.6.30)$$

是一个 N-O 型 Q 过程. 再参看引理 14.6.4 的证明,易完成本引理的证明.

引理 14.6.6. 若 Q 非保守且条件 (ii) 不成立, 则存在无穷多个 N-$\overline{B\cup F}$ 型 Q 过程.

证. 由引理 14.6.3 和引理 14.6.5 立得我们的引理.

引理 14.6.7. 设 $X(\omega)=\{x(t,\omega), t<\sigma(\omega)\}$ 是完全可分的, Borel 可测的, 样本函数以概率 1 有连续的齐次可列马尔可夫过程,并且是可微的, $Q=(q_{ij})$ 是其密度矩阵, E 是其最小状态空间, $\tau(\omega)$ 是其第一次跳跃时刻,则对于任一 $i\in(j:q_j\neq 0)$ 有

$$P(x(\tau)=j\mid x_0=i)=\frac{q_{ij}}{q_i} \quad (j\in E) \quad (14.6.31)$$

$$P(x(\tau)=\infty\mid x_0=i)\leqslant\frac{q_i-\sum_{j\in E}q_{ij}}{q_i} \quad (14.6.32)$$

$$P(\tau<t\mid x_0=i,x(\tau)=j)=P(\tau<t\mid x_0=i)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-e^{-q_it}, & t\geqslant 0\end{cases}$$

$$(j\in E\cup\{\infty\}) \quad (14.6.33)$$

证. 由 [1, II, 定理 15.6] 立得 (14.6.31),由 (14.6.31) 立得 (14.6.32), 由 [1, II, 定理 15.2] 立得 (14.6.33).

引理 14.6.8. 设 $P_\lambda=(p_{ij}(\lambda), i, j\in E)$ 是任一 Q 过程, 则

$$0\leqslant\lambda\sum_{j\in E}p_{ij}(\lambda)-\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\left(\lambda\sum_{j\in E}p_{kj}(\lambda)\right)-\frac{\lambda}{\lambda+q_i}$$

$$\leqslant\frac{q_i-\sum_{j\in E}q_{ij}}{\lambda+q_i} \quad (\lambda>0, i\in E) \quad (14.6.34)$$

证. 设 $X(\omega)=\{x(t,\omega),\ t<\sigma(\omega)\}$ 是一个 Q 过程，且它的转移函数的拉氏变换为 $P_\lambda=(p_{ij}(\lambda),\ i,\ j\in E)$，它是完全可分的，Borel 可测的，样本函数以概率 1 右连续. 熟知，具有上述性质的过程 $X(\omega)$ 总是存在的. 于是

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(x(t)\in E\mid x_0=i)dt=\sum_{j\in E}p_{ij}(\lambda)\quad (i\in E)\ (14.6.35)$$

今以 $\tau(\omega)$ 表示 $x(\cdot,\omega)$ 的第一个跳跃点，则

$$\begin{aligned}P(x(t)\in E\mid x_0=i)&=\sum_{k\neq i}P(x(t)\in E,\ \tau<t,\ x(\tau)\\&=k\mid x_0=i)+P(x(t)\in E,\tau>t\mid x_0=i)\\&+P(x(t)\in E,\tau<t,x(\tau)=\infty\mid x_0=i)\ \ (i\in E).\end{aligned}$$

$$(14.6.36)$$

由 [1,II,定理 16.4] 知

$$\begin{aligned}&P(x(t)\in E,\tau<t,x(\tau)=k\mid x_0=i)\\&=\int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ik}P(x(s)\in E\mid x_0=k)ds\ \ (i\in E)\ \ (14.6.37)\end{aligned}$$

把 (14.6.37) 代入 (14.6.36) 并作拉氏变换得

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in E}p_{ij}(\lambda)-\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\left(\sum_{j\in E}p_{kj}(\lambda)\right)-\frac{1}{\lambda+q_i}\\&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(x(t)\in E,\tau<t,x(\tau)=\infty\mid x_0=i)dt,\end{aligned}$$

$$(i\in E)\qquad (14.6.38)$$

当 $q_i=0$ 时，显然有

$$P(x(t)\in E,\tau<t,x(\tau)=\infty\mid x_0=i)=0\quad (14.6.39)$$

从而

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(x(t)\in E,\tau<t,x(\tau)=\infty\mid x_0=i)dt=0=\frac{q_i-\sum_{j\neq i}q_{ij}}{\lambda(\lambda+q_i)}$$

$$(i\in(j:q_j=0))\qquad (14.6.40)$$

当 $q_i\neq 0$ 时，由概率的非负性及引理 14.6.7 得

$$\begin{aligned}0&\leqslant P(x(t)\in E,\tau<t,x(\tau)=\infty\mid x_0=i)\\&\leqslant P(x(\tau)=\infty\mid x_0=i)P(\tau<t\mid x_0=i,x(\tau)=\infty)\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{q_i - \sum_{j \neq i} q_{ij}}{q_i} P(\tau < t | x_0 = i) \tag{14.6.41}$$

于是有

$$0 \leqslant \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(x(t) \in E, \tau < t, x(\tau) = \infty | x_0 = i) dt$$

$$\leqslant \frac{q_i - \sum_{j \neq i} q_{ij}}{\lambda(\lambda + q_i)} \quad (i \in (j: q_j \neq 0)) \tag{14.6.42}$$

由 (14.6.38), (14.6.40) 和 (14.6.42) 立得我们的引理.

引理 14.6.9. 设 Q 非保守. 若定理 14.2.4 中的条件(i)和 (ii) 同时成立,则一切 Q 过程是 F 型的. 从而都不是 $\overline{B \cup F}$ 型的.

证. 设 $P_\lambda = (p_{ij}(\lambda); i, j \in E)$ 是任一 Q 过程, 参看 § 12.3 可知,在条件 (i) 成立之下,有

$$p_{ij}(\lambda) = p_{ij}^{\min}(\lambda) + \sum_{a \in E} p_{ia}^{\min}(\lambda) f_\lambda^{(a)}(j), \quad f_\lambda^{(a)}(j) \geqslant 0,$$
$$(\lambda > 0, i, j, a \in E) \tag{14.6.43}$$

令

$$\mathbf{F}_\lambda^{(a)} = (f_\lambda^{(a)}(1), f_\lambda^{(a)}(2), \cdots) \tag{14.6.44}$$

于是由(14.6.43)得

$$\lambda \sum_{j \in E} p_{ij}(\lambda) = \lambda \sum_{j \in E} p_{ij}^{\min}(\lambda) + \sum_{a \in E} \lambda p_{ia}^{\min}(\lambda) [\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}],$$
$$[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] \geqslant 0 \tag{14.6.45}$$

由 (14.6.45)、定理 3.3.2 及 $\{p_{ia}^{\min}(\lambda); i \in E\}$ 是拟规格方程

$$x_i = \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} x_k + \frac{\delta_{ia}}{\lambda + q_i} \quad (i \in E) \tag{14.6.46}$$

的最小非负解知, $\left\{\lambda \sum_{j \in E} p_{ij}(\lambda); i \in E\right\}$ 是第一型囿壹方程

$$x_i = \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} x_k + \frac{\lambda}{\lambda + q_i} + \frac{\lambda [\mathbf{F}_\lambda^{(i)}, \mathbf{1}]}{\lambda + q_i} \quad (i \in E) \tag{14.6.47}$$

的最小非负解,从而

$$\lambda \sum_{j \in E} p_{ij}(\lambda) - \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} \left(\lambda \sum_{j \in E} p_{kj}(\lambda)\right) - \frac{\lambda}{\lambda + q_i}$$

$$= \frac{\lambda[\mathbf{F}_\lambda^{(i)}, \mathbf{1}]}{\lambda + q_i} \quad (i \in E) \tag{14.6.48}$$

由 (14.6.48) 和引理 14.6.8 得

$$[\mathbf{F}_\lambda^{(i)}\mathbf{1}] \leqslant \frac{q_i - \sum_{j \neq i} q_{ij}}{\lambda} < +\infty \quad (\lambda > 0, i \in E) \tag{14.6.49}$$

参看 §12.3 和 [33, 引理 1] 的证明可知，存在行矢量 $\bar{\boldsymbol{\rho}}_\mu^{(a,\lambda)} \geqslant \mathbf{0}_-$ 及与 μ 无关（但与 a 和 λ 有关）的行矢量 $\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)} \geqslant \mathbf{0}_-$，使

$$[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)} P_\lambda^{\min}, \mathbf{1}] < +\infty \qquad (\lambda > 0, a \in E) \tag{14.6.50}$$

$$\lambda \mathbf{F}_\lambda^{(a)} - \mathbf{F}_\lambda^{(a)} Q = \boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)} \qquad (\lambda > 0, a \in E) \tag{14.6.51}$$

$$\mathbf{F}_\lambda^{(a)} = \boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)} P_\lambda^{\min} + \bar{\boldsymbol{\rho}}_\lambda^{(a,\lambda)} \qquad (\lambda > 0, a \in E) \tag{14.6.52}$$

$$\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)} = \boldsymbol{\beta}_\mu^{(a)} + (\mu - \lambda) \sum_{t \in E} [\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}] \boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)} \tag{14.6.53}$$

并且对于固定的 a 和 λ，$\bar{\boldsymbol{\rho}}_\mu^{(a,\lambda)} = (\bar{\rho}_\mu^{(a,\lambda)}(1), \bar{\rho}_\mu^{(a,\lambda)}(2), \cdots)$ 是方程

$$\left.\begin{aligned} &\mu \boldsymbol{\rho}_\mu - \boldsymbol{\rho}_\mu Q = \mathbf{0}_-, \quad \mu > 0 \\ &0 \leqslant \boldsymbol{\rho}_\mu, \quad \boldsymbol{\rho}_\mu \mathbf{1} < +\infty \\ &\boldsymbol{\rho}_\mu - \boldsymbol{\rho}_\nu + (\mu - \nu) \boldsymbol{\rho}_\nu \boldsymbol{\rho}_\mu^{\min} = \mathbf{0}_- \end{aligned}\right\} \tag{14.6.54}$$

的解．这里

$$\mathbf{P}_\mu^{\min(t)} = \begin{pmatrix} p_{1t}^{\min}(\mu) \\ p_{2t}^{\min}(\mu) \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{14.6.55}$$

由(14.6.49)及

$$q_a - \sum_{j \neq a} q_{aj} \geqslant \lambda[\mathbf{F}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] = \lambda[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)} P_\lambda^{\min} + \bar{\boldsymbol{\rho}}_\lambda^{(a,\lambda)}, \mathbf{1}]$$

$$\geqslant [\lambda \boldsymbol{\beta}^{(a)} P_\lambda^{\min}, \mathbf{1}] = [\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \lambda P_\lambda^{\min} \mathbf{1}] \geqslant n_\lambda [\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] \tag{14.6.56}$$

得

$$[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}, \mathbf{1}] \leqslant \frac{q_a - \sum_{j \neq a} q_{aj}}{n_\lambda} < +\infty \quad (\lambda > 0, \ a \in E) \tag{14.6.57}$$

参考 §12.3 可证

$$[\boldsymbol{\beta}_\mu^{(a)}, \mathbf{1}] \downarrow 0 \quad (\mu \uparrow +\infty) \tag{14.6.58}$$

$$(\mu-\lambda)\sum_{t\in E}[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}\mathbf{P}_\lambda^{\min},\ \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}][\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)},\ \mathbf{1}]$$

$$=\sum_{t\in E}[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{P}_\lambda^{\min(t)}][\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)},\mathbf{1}]-\sum_{t\in E}[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)},\mathbf{P}_\mu^{\min(t)}]$$

$$\cdot[\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)},\mathbf{1}]<+\infty \tag{14.6.59}$$

由定理 14.2.4 中的条件 (ii) 和 (14.6.57) 知

$$\sum_{t\in E}\bar{\rho}_\mu^{(a,\lambda)}(t)[\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)},\mathbf{1}]\leqslant\frac{1}{n_\mu}\sum_{t\in E}\bar{\rho}_\mu^{(a,\lambda)}(t)\left(q_t-\sum_{j\neq t}q_{tj}\right)<+\infty \tag{14.6.60}$$

由 (14.6.60) 和 $\bar{\boldsymbol{\rho}}_\mu^{(a,\lambda)}$ 满足 (14.6.54) 知

$$(\mu-\lambda)\sum_{t\in E}[\bar{\boldsymbol{\rho}}_\lambda^{(a,\lambda)},\mathbf{P}_\mu^{\min(t)}][\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)},\ \mathbf{1}]$$

$$=\sum_{t\in E}(\mu-\lambda)\bar{\boldsymbol{\rho}}_\lambda^{(a,\lambda)}\mathbf{P}_\mu^{\min(t)}[\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)},\ \mathbf{1}]$$

$$=\sum_{t\in E}(\bar{\rho}_\lambda^{(a,\lambda)}(t)-\bar{\rho}_\mu^{(a,\lambda)}(t))[\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)},\ \mathbf{1}]$$

$$=\sum_{t\in E}\bar{\rho}_\lambda^{(a,\lambda)}(t)[\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)},\mathbf{1}]-\sum_{t\in E}\bar{\rho}_\mu^{(a,\lambda)}(t)[\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)},\mathbf{1}]<+\infty \tag{14.6.61}$$

由 (14.6.53) 和 (14.6.57) 得

$$[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)},\mathbf{1}]=[\boldsymbol{\beta}_\mu^{(a)},\mathbf{1}]+(\mu-\lambda)\sum_{t\in E}[\mathbf{F}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}][\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)},\mathbf{1}]$$

$$<+\infty \tag{14.6.62}$$

由 (14.6.52), (14.6.59), (14.6.61) 以及 (14.6.62) 得

$$[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{1}]=[\boldsymbol{\beta}_\mu^{(a)},\ \mathbf{1}]+(\mu-\lambda)\sum_{t\in E}[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)}P_\lambda^{\min},\ \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}][\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)},\ \mathbf{1}]$$

$$+(\mu-\lambda)\sum_{t\in E}[\bar{\boldsymbol{\rho}}_\lambda^{(a,\lambda)},\ \mathbf{P}_\mu^{\min(t)}][\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)},\mathbf{1}]=[\boldsymbol{\beta}_\mu^{(a)},\ \mathbf{1}]$$

$$+\sum_{t\in E}[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)},\ \mathbf{P}_\lambda^{\min(t)}][\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)},\ \mathbf{1}]-\sum_{t\in E}[\boldsymbol{\beta}_\lambda^{(a)},\mathbf{P}_\mu^{\min}(t)]$$

$$\cdot[\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)},\mathbf{1}]+\sum_{t\in E}\bar{\rho}_\lambda^{(a,\lambda)}(t)[\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)}\mathbf{1}]-\sum_{t\in E}\bar{\rho}_\mu^{(a,\lambda)}(t)[\boldsymbol{\beta}_\mu^{(t)},$$

$$\cdot\mathbf{1}]<+\infty \tag{14.6.63}$$

由 $\boldsymbol{\rho}_{\mu}^{(a,\lambda)}$ 满足 (14.6.54) 知

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}_{\mu}^{(a,\lambda)} \downarrow \quad (\mu \uparrow + \infty) \qquad (14.6.64)$$

由$P_{\mu}^{\min(t)}$的定义知

$$P_{\mu}^{\min(t)} \downarrow \quad (\mu \uparrow + \infty) \qquad (14.6.65)$$

由 (14.6.58), (14.6.64), (14.6.65) 和 (14.6.66) 得

$$|\boldsymbol{\beta}_{\lambda}^{(a)}, \mathbf{1}| = 0 \quad (\lambda > 0, a \in E) \qquad (14.6.66)$$

由 $\boldsymbol{\beta}_{\lambda}^{(a)} \geqslant \mathbf{0}_{-}$ 及 (14.6.66) 得

$$\boldsymbol{\beta}_{\lambda}^{(a)} = \mathbf{0}_{1} \quad (\lambda > 0, a \in E) \qquad (14.6.67)$$

由 (14.6.52) 和 (14.6.67) 得

$$\mathbf{F}_{\lambda}^{(a)} = \bar{\boldsymbol{\rho}}_{\lambda}^{(a,\lambda)} \quad (\lambda > 0, a \in E) \qquad (14.6.68)$$

由 (14.6.43), (14.6.68) 以及 $\bar{\boldsymbol{\rho}}_{\lambda}^{(a,\lambda)}$ 满足方程 (14.6.54) 知, P_{λ} 是 F 型 Q 过程. 于是, 引理得证.

引理 14.6.10. 定理 14.2.4 中条件 (i) 成立的充要条件是定理 14.2.4 中的条件 (i)′ 和 (i)″ 同时成立.

证. 注意定理 12.8.1 的证明过程立得我们的引理.

引理 14.6.11. 设 Q 非保守且定理 14.2.4 中的条件 (i) 成立, 则

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \sum_{j \in E} n_{\lambda}(j) < +\infty \qquad (14.6.69)$$

的充要条件是对一切 $\mu > 0$ 有

$$\sum_{j \in E} \left(q_j - \sum_{k \neq j} q_{jk} \right) n_{\mu}(j) < +\infty \qquad (14.6.70)$$

其中 $\mathbf{n}_{\lambda} = (n_{\lambda}(1), n_{\lambda}(2), \cdots)$ 是方程 (14.2.7) 的解.

证. 由引理 14.6.3 知, 若 (14.6.69) 成立, 则(14.6.70)成立. 反之, 若定理 14.2.4 中的条件 (i) 和 (14.6.70) 成立, 则由引理 14.6.9 知, 不存在 O 型 Q 过程. 但由引理 14.6.5 知, (14.6.69) 不成立时必存在 O 型 Q 过程. 因此, 若定理 14.2.4 中的条件 (i)和(14.6.70) 都成立, 则 (14.6.69) 亦必成立. 于是, 引理得证.

引理 14.6.12. 若 Q 保守, 则不存在 $\overline{B \cup F}$ 型 Q 过程.

证. 周知, 这时一切 Q 过程都是 B 型的. 故不存在 $\overline{B \cup F}$ 型

Q过程.

定理 14.2.4 的证明：由引理 14.6.4，引理 14.6.6，引理 14.6.9–引理 14.6.12，立得我们的定理.

系 14.6.1. 若Q非保守，且

$$\sup_{i\in \dot{E}}\left(q_i-\sum_{j\neq i}q_{ij}\right)\leqslant c<+\infty \tag{14.6.71}$$

则不存在 $\overline{B\cup F}$ 型 Q 过程的充要条件是定理 14.2.4 中的条件 (i) 成立.

证. 因为此时，对 (14.2.7) 的任一解有

$$\sum_{j\in E}\left(q_j-\sum_{k\neq j}q_{jk}\right)n_\lambda(j)\leqslant c\sum_{j\in \dot{E}}n_\lambda(j)<c\sum_{j\in E}n_\lambda(j)<+\infty \tag{14.6.72}$$

所以定理 14.2.4 中的条件 (ii) 成立. 于是，由定理 14.2.4 立得所欲证.

系 14.6.2. 若Q非保守，且

$$\sup_{i\in \dot{E}}q_i\leqslant c<+\infty \tag{14.6.73}$$

则 $\overline{B\cup F}$ 型Q过程不存在的充要条件是 B 型Q过程唯一.

证. 易证，若 (14.6.73) 成立，则 (14.2.8) 成立，于是由定理 14.2.4 以及

$$\sum_{j\in E}n_\lambda(j)\left(q_j-\sum_{k\neq j}q_{jk}\right)\leqslant\sum_{j\in \dot{E}}n_\lambda(j)q_j$$

$$\leqslant c\sum_{j\in \dot{E}}n_\lambda(j)\leqslant c\sum_{j\in E}n_\lambda(j)<+\infty \tag{14.6.74}$$

立得所欲证. 这里 $\mathbf{n}_\lambda=(n_\lambda(1),n_\lambda(2),\cdots)$是(14.2.7) 的任一解.

系 14.6.3. 若Q非保守且 $\dot{E}$ 为有限集，则 $\overline{B\cup F}$ 型Q过程不存在的充要条件是 B 型Q过程唯一.

系 14.6.4. 若Q非保守且不存在 $\overline{B\cup F}$ 型Q过程，则 B 型Q过程唯一.

系 14.6.5. 若Q非保守且不存在 $\overline{B\cup F}$ 型Q过程，则一切Q过程都是 F 型的.

§ 14.7. 定理 14.2.5—定理 14.2.10 的证明

定理 14.2.5 的证明. 由引理 14.6.10.[24] 以及第十二章，立得我们的定理.

定理 14.2.6 的证明. 设 Q 非保守, $P_\lambda = (p_{ij}(\lambda),\ i,\ j \in E)$ 是任一 B 型 Q 过程, 于是 $\left\{\lambda \sum\limits_{j \in E} p_{ij}(\lambda),\ i \in E\right\}$ 满足方程

$$x_i = \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} x_k + \frac{\lambda}{\lambda + q_i} \quad (i \in E) \qquad (14.7.1)$$

于是

$$\lambda \sum_{j \in E} p_{ij}(\lambda) = \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} \left(\lambda \sum_{j \in E} p_{kj}(\lambda)\right) + \frac{\lambda}{\lambda + q_i}$$

$$\leqslant \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} + \frac{\lambda}{\lambda + q_i} = \frac{\lambda + \sum\limits_{k \neq i} q_{ik}}{\lambda + q_i} \quad (i \in E) \qquad (14.7.2)$$

由于 Q 非保守,故存在状态 $s \in E$ 使

$$\sum_{k \neq s} q_{sk} < q_s \qquad (14.7.3)$$

于是由(14.7.2)有

$$\lambda \sum_{j \in E} p_{sj}(\lambda) \leqslant \frac{\lambda + \sum\limits_{k \neq s} q_{sk}}{\lambda + q_s} < 1 \qquad (14.7.4)$$

故, P_λ 不是 N-B 型 Q 过程. 于是定理 14.2.6 的 (2) 得证.

若 Q 保守且过程非唯一,显见

$$P_\lambda^{(n)} = P_\lambda^{\min} + \frac{\mathbf{1} - \lambda P_\lambda^{\min}\mathbf{1}}{\lambda \boldsymbol{\alpha}^{(n)} P_\lambda^{\min}\mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(n)} P_\lambda^{\min} \quad (n = 1, 2, \cdots) \qquad (14.7.5)$$

给出了无穷多个彼此不同的 N-B 型 Q 过程,这里

$$\boldsymbol{\alpha}^{(n)} = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{(n-1)\text{个}}, 1, 0, 0, \cdots) \qquad (14.7.6)$$

定理的其余结论显见成立,故证明从略.

定理 14.2.7 的证明. 本定理易由一些熟知的事实和[27]中的如下结果得出: 若最小 Q 过程不断或 (14.2.2) 恰有一个线性独立

解，则 $N-F$ 型 Q 过程唯一；若最小 Q 过程中断且(14.2.2)有多于一个线性独立解，则 $N-F$ 型 Q 过程有无穷多个.

定理 14.2.8 的证明. 由定理 14.2.6 和定理 14.2.7 立得我们的定理.

定理 14.2.9 的证明. 由定理 14.2.4、引理 14.6.4 以及引理 14.6.6，立得我们的定理.

定理 14.2.10 的证明. 当注意在 Q 保守时，一切 Q 过程都是 B 型 Q 过程时，定理 14.2.10 中在 Q 保守情况下的结论立刻由定理 14.2.6 推出.

若 Q 非保守且 Q 过程唯一，则这时唯一的 Q 过程是最小 Q 过程，从而是 B 型 Q 过程. 于是由定理 14.2.6 的(2)知，它是中断的，即不是 $N-O$ 型 Q 过程. 故这时不存在 $N-O$ 型 Q 过程.

若 Q 非保守且条件 (a) 和 (b) 同时成立，则由引理 14.6.9（因由 [29] 知，这时方程 (14.2.2) 的解 n_λ 满足方程 $\mathbf{n}_\lambda - \mathbf{n}_\mu + (\lambda - \mu)\mathbf{n}_\mu P_\lambda^{\min} = \mathbf{0}_-$）知，一切 Q 过程都是 F 型的，于是由条件 (b) 和定理 14.2.7 知，这时恰好有一个 $N-F$ 型 Q 过程，从而恰有一个 $N-O$ 型 Q 过程.

若 Q 非保守且 (a) 不成立，则由引理 14.6.4 知，存在无穷多个 $N-O$ 型 Q 过程.

若 Q 非保守，(14.2.5) 成立及 (14.2.2) 有多于一个线性独立解. 则由定理 14.2.7 知，这时存在无穷多个 $N-F$ 型 Q 过程，从而存在无穷多个 $N-O$ 型 Q 过程.

若 Q 非保守，(14.2.5) 成立，(14.2.2)恰有一个线性独立解 $\mathbf{n}_\lambda$，且这个解满足 (14.2.12). 则由引理 14.6.5 知，这时存在无穷多个 $N-O$ 型 Q 过程.

综合上述，立得我们的定理.

参 考 文 献

[1] K. L. Chung, Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, Springer-Verlag, 1960.

[2] 王梓坤，生灭过程构造论，数学进展，**5**: 2 (1962), 137—170.

[3] 王梓坤，生灭过程的遍历性与零一律，南开大学学报(自然科学)，**5**:5(1964), 89—94.

[4] 杨超群，关于生灭过程论的注记，数学学报，**15**: 2 (1965), 173—187.

[5] 杨超群，生灭过程的性质，数学进展，**9**: 4 (1966), 365—380.

[6] Е. Б. Дынкин, Марковские Процессы, Физматлиз, Москва, 1963.

[7] 施仁杰，可列马尔科夫过程的随机时间替换，南开大学学报(自然科学)，**5**: 5 (1964), 51—88.

[8] Л. В. 康脱洛维奇，В. И. 克雷洛夫，高等分析近似方法，科学出版社，北京，1966 (中译本).

[9] Ф. Р. 甘特马赫尔，矩阵论，高等教育出版社，1955 (中译本).

[10] R. S. 瓦格，矩阵迭代分析，上海科技出版社，1966.

[11] 杨超群，可列马氏过程的积分型泛函和双边生灭过程的边界性质，数学进展，**7**: 4 (1964), 397—424.

[12] J. L. Doob, Discrete Potential Theory and Boundaries, *Journ. of Math. and Mech.*, **8**:3 (1959), 433—458.

[13] G. A. Hunt, Markoff Chains and Martin Boundaries, *Illinois Journ. of Math.*, **4**(1960), 313—340.

[14] H. Kunita, Applications of Martin Boundaries to Instantaneous Return Markov Processes over a Denumerable Space, *J. Math. Soc. Japan*, **14**(1962), 66—100.

[15] Е. Б. Дынкин, Граничная теория для Марковских процессов (Диекретный случай), *УМН*, 24, вып. **2** (146), 1969, 3—42.

[16] 关肇直，泛函分析讲义，高等教育出版社，1958.

[17] 吴立德，可数马尔科夫过程状态的分类，数学学报，**15**:1 (1965), 32—41.

[18] 王梓坤，On Distributions of Functions of Birth and Death Processes and Their Applications in The Theory of Queues, *Scientia Sinica* (中国科学), **X**:2(1961), 160—170.

[19] 吴立德，齐次可数马尔科夫过程积分型泛函的分布，数学学报，**13**: 1 (1962), 86—93.

[20] 王梓坤，The Martin Boundary and Limit Theorems for Excessive Function, *Scientia Sinica* (中国科学), **XIV**: 8(1965) 1118—1129.

[21] E. Б. 邓肯，马尔科夫过程论基础，科学出版社，北京，1962.

[22] 王梓坤，随机过程论，科学出版社，北京，1965.

[23] K. L. Chung, Lectures on Boundary Theory for Morkov Chains, Princeton, New Jersey, 1970.

[24] J. L. Doob, Markov Chains-denumerable Case, *Tran. Am. Math.*, **58** (1945), 455—473.

[25] W. Feller, On the integro-differential equations of purely discon-

tinuous Markoff Process, *Tran. Am. Math. Soc.*, **48**(1940), 488—515; *ibid.*, **58**(1945), 474.
[26] 侯振挺，Q 过程的唯一性准则，中国科学，**2**(1974)，115—130.
[27] G. E. H. Reuter, Denumerable Markov processes and the associated semigroup on l, *Acta Math.*, **97**(1957), 1—46.
[28] G. E. H. Reuter, Denumerable Markov processes III, *J. London Math. Soc.*, **37**(1962), 64—73.
[29] G. E. H. Reuter, Denumerable Markov processes II, *J. London Math. Soc.*, **34**(1959), 81—91.
[30] T. E. Harris, The theory of branching processes, Springer-Verlag, 1963.
[31] 胡迪鹤，可数的马尔可夫过程的构造理论，北京大学学报(自然科学)，**2**(1965)，111—143.
[32] 杨超群，一类生灭过程，数学学报，**15**(1965)，9—31.
[33] 杨超群，柯氏向后微分方程组的边界条件，数学学报，**16**: 4 (1966)，429—452.
[34] G. E. H. Reuter, Denumerable Markov Processes (IV): On C. T. Hou's uniquness theorem for Q-Semigroups, To appear in Zeitschmft für Wahrscheinlichkeits Theorie.
[35] 侯振挺，齐次可列马尔可夫过程的样本函数的构造，中国科学，**3** (1975)，259—266.
[36] 侯振挺、郭青峰，齐次可列马尔可夫过程构造论中的定性理论，**4** (1976)，239—262.
[37] 侯振挺，齐次可列马尔可夫过程中的概率-分析法，科学通报，**3** (1973)，115—118.
[38] 侯振挺，齐次可列马尔可夫过程构造论，科学通报，**3** (1975)，130.

索　　引

外　来　字

二画、三画

四　画

五　画

六画—九画

十　画

十一画以上